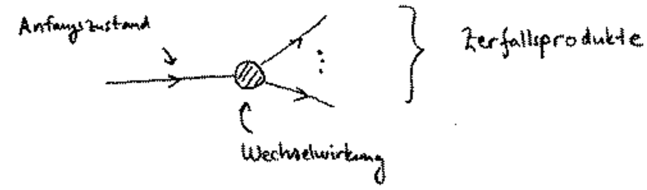
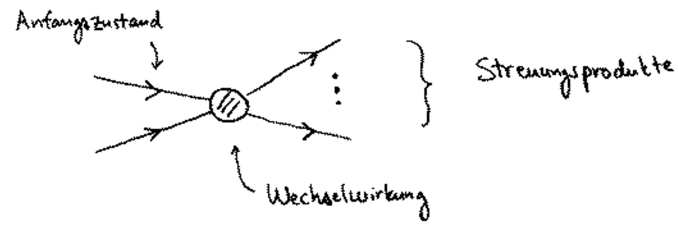
3. Zerfälle

Im vorigen Kapitel haben wir gelernt, wie freie relativistische Teilchen mit Impuls $\bar{p}$ (und Polarisation λ / Helizität s) beschrieben werden können. Jetzt führen wir Wechselwirkungen ein. Dies führt zu zwei Arten von Prozessen:

Zerfälle



Streuung



In diesem Kapitel betrachten wir Zerfälle, im nächsten Streuung.

Grundbegriffe für Zerfälle:

- die Lebensdauer τ
  - * (normalerweise) für ein ruhendes Teilchen
  - * gemeint wird der Durchschnitt (für ein bestimmtes Teilchen bekommen wir keine Vorhersage)
- die Zerfallsrate Γ
  - * die Wahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit, daß ein Teilchen zerfallen wird:

$$dN = -\Gamma N \, dt$$

$$\Rightarrow N(t) = N(0) e^{-\Gamma t}$$

Es kann gezeigt werden (vgl. Übungen), daß $\Gamma = \frac{1}{\tau}$ gilt!

- der Zerfallskanal i
  - * die Art der Zerfallsprodukte
  - * die Zerfallsrate zu diesem Kanal: Γ_i.
- die Gesamtzerfallsrate $\Gamma_{tot} = \sum_i \Gamma_i$.
- das Verzweigungsverhältnis für den i-ten Zerfallskanal $= \frac{\Gamma_i}{\Gamma_{tot}}$.
  - * Je größer das Verzweigungsverhältnis, desto mehr Zerfälle zu diesem Kanal.

Wie berechnen wir die Zerfallsrate?

Der Anfangspunkt ist die Zeitabhängige Störungstheorie in der Wechselwirkungsdarstellung (S.12):

$$\hat{H} = \underbrace{\hat{H}_0}_{\text{freie Teilchen}} + g\underbrace{\hat{V}}_{\text{Wechselwirkungen}}$$

Zeitentwicklungsoperator $\hat{U}_I(t,t_0)$:

$$|\Psi(t)\rangle_I = \hat{U}_I(t,t_0)\,|\Psi(t_0)\rangle_I \,.$$

Aufgabe 23(b):

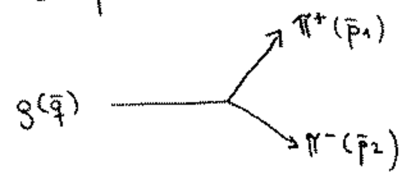
$$\hat{U}_I(t,t_0) = \mathbb{1} - ig\int_{t_0}^{t} dt'\,\hat{V}_I(t') + \mathcal{O}(g^2) \,.$$

Nun definieren wir eine Streumatrix S:

$$S_{fi} \equiv \underbrace{{}_I\langle f|}_{\text{Endzustand}}\,\hat{U}_I(+\infty,-\infty)\,\underbrace{|i\rangle_I}_{\text{Anfangszustand}} \,.$$

Nichtdiagonale Elemente von S sind ungleich zu Null nur für $g \neq 0$!

Betrachten wir ein Beispiel:



$$\rho:\quad Q \equiv (E_{\vec{q}}, \vec{q}\,),\quad E_{\vec{q}} \equiv \sqrt{m_\rho^2 + \vec{q}^{\,2}}$$
$$\pi^+:\quad P_1 \equiv (E_{\vec{p}_1}, \vec{p}_1),\quad E_{\vec{p}_1} \equiv \sqrt{m_\pi^2 + \vec{p}_1^{\,2}}$$
$$\pi^-:\quad P_2 \equiv (E_{\vec{p}_2}, \vec{p}_2),\quad E_{\vec{p}_2} \equiv \sqrt{m_\pi^2 + \vec{p}_2^{\,2}}$$

Wir werden vermuten, daß die Wechselwirkung hat die Form[1]

$$g\hat{V}_I(t') \equiv \int d^3\vec{x}\; \underbrace{\mathcal{M}}_{\text{eine Konstante}}\; \hat{\phi}^\dagger(\vec{x},t')\,\hat{\phi}(\vec{x},t')\,\hat{\rho}(\vec{x},t') \,.$$

---

(1) Das physikalische ρ ist ein Spin-1 Teilchen, nicht Spin-0 wie diese Form vermutet, aber dieser Unterschied ist momentan für uns nicht zu wichtig.

Das nicht-triviale S-Matrixelement erster Ordnung wird damit

$$S_{fi} = -i \langle \pi^+(\bar{p}_1)\, \pi^-(\bar{p}_2) \,|\, \int dt' \int d^3\bar{x} \;\; \mathcal{M}\, \hat{\phi}^+ \hat{\phi}\, \hat{\varrho} \;\; |\, \varrho(\bar{q}) \rangle$$

Hier:

$$\hat{\phi}(\bar{x},t') = \int \frac{d^3\bar{p}_1}{\sqrt{(2\pi)^3\, 2E_{\bar{p}_1}}} \left[\hat{a}_{\bar{p}_1}\, e^{-iP_1\cdot x} + \hat{b}^+_{\bar{p}_1}\, e^{iP_1\cdot x} \right]$$

erzeugt Antiteilchen; auslaufendes π^+

$$\hat{\phi}^+(\bar{x},t') = \int \frac{d^3\bar{p}_2}{\sqrt{(2\pi)^3\, 2E_{\bar{p}_2}}} \left[\hat{a}^+_{\bar{p}_2}\, e^{iP_2\cdot x} + \hat{b}_{\bar{p}_2}\, e^{-iP_2\cdot x} \right]$$

erzeugt Teilchen; auslaufendes π^-

$$\hat{\varrho}(\bar{x},t') = \int \frac{d^3\bar{q}}{\sqrt{(2\pi)^3\, 2E_{\bar{q}}}} \left[\hat{a}_{\bar{q}}\, e^{-iQ\cdot x} + \hat{a}^+_{\bar{q}}\, e^{iQ\cdot x} \right]$$

vernichtet Teilchen; einlaufendes ϱ

$$\Rightarrow \quad S_{fi} = -i \int dt' \int d^3\bar{x}\; \mathcal{M} \cdot \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\bar{p}_1}}\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\bar{p}_2}}\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\bar{q}}}} \cdot e^{i(P_1+P_2-Q)\cdot x}$$

$$= -i\,(2\pi)^4\, \delta^{(4)}(P_1+P_2-Q)\; \underbrace{\frac{\mathcal{M}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\bar{p}_1}}\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\bar{p}_2}}\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\bar{q}}}}}_{\equiv \text{ Transfermatrixelement } T_{fi}}$$

$\mathcal{M} \equiv$ Amplitude

Energie-Impuls-Erhaltung kommt automatisch heraus!

Wahrscheinlichkeit :

$$|S_{fi}|^2 = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1+p_2-Q)\ (2\pi)^4 \delta^{(4)}(0)\ \frac{|\mathcal{M}|^2}{(2\pi)^3 2E_{\vec p_1}\ (2\pi)^3 2E_{\vec p_2}\ (2\pi)^3 2E_{\vec q}}$$

Aufgabe 3.5 : $\delta^{(3)}(\vec 0) = \frac{V}{(2\pi)^3}$, V = das Volumen

$\Rightarrow$ $\delta^{(4)}(0) = \frac{V\cdot T}{(2\pi)^4}$, $V\cdot T$ = das Viervolumen

Zerfallsrate $\Gamma = \frac{|S_{fi}|^2}{T}$. Wir sollen auch über allen möglichen Impulsen der auslaufenden Teilchen integrieren.

$$\Rightarrow \Gamma = \int d^3\vec p_1 \int d^3 \vec p_2\ (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1+p_2-Q) \frac{|\mathcal{M}|^2}{2E_{\vec q}\cdot (2\pi)^3 2E_{\vec p_1}\ (2\pi)^3 2E_{\vec p_2}} \cdot \frac{V}{(2\pi)^3}$$

Es gibt aber ein Problem noch : der Anfangszustand war eine ebene Welle, die überall im Raum ausgebreitet ist. Seine Normierung war eben $\langle g|g\rangle = \delta^{(3)}(\vec 0) = \frac{V}{(2\pi)^3}$ (Aufgabe 3.3, Aufgabe 3.5). Wenn wir also ein einziges Teilchen betrachten wollen, normiert als $\langle g|g\rangle = 1$, müßen wir mit $\frac{V}{(2\pi)^3}$ dividieren!

$$\Rightarrow \boxed{\Gamma_{g\to\pi^+\pi^-} = \frac{1}{2E_{\vec q}} \int \frac{d^3\vec p_1}{(2\pi)^3 2E_{\vec p_1}} \int \frac{d^3\vec p_2}{(2\pi)^3 2E_{\vec p_2}} \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1+p_2-Q)\ |\mathcal{M}|^2}$$

"Fermis Goldene Regel" (für Zerfälle).

Für n-Teilchen-Zerfall :

$$\Gamma_{g\to 12\ldots n} = \frac{1}{2E_{\vec q}} \cdot C \cdot \int d\Phi_n \cdot |\mathcal{M}|^2 \quad ;$$

$$\int d\Phi_n \equiv \text{"Phasenraumintegration"} \equiv \int \left\{ \prod_{i=1}^{n} \frac{d^3\vec p_i}{(2\pi)^3 2E_{\vec p_i}} \right\} (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i - Q\right)$$

$C \equiv$ "ein statistischer Faktor" $= \frac{1}{j!}$ für j identische Teilchen.

Es bleibt übrig, "nur" die Phasenraumintegrationen durchzuführen! (vgl. Übungen)