Normierung

Wie die Konstanten C, C' gewählt werden, ist mit einigen anderen Konventionen (wie die Vollständigkeitsrelation und die Formel der zweiten Quantisierung weiter unten) zusammengebunden.

Wir definieren einen hermitesch-konjugierten Spinor durch

$$u = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \Rightarrow u^+ \equiv (\alpha^* \beta^* \gamma^* \delta^*),$$

und einen Dirac-adjungierten Spinor durch

$$\bar{u} \equiv u^+ \gamma^0 .$$

Es zeigt sich als nützlich, jetzt Folgendes zu verlangen:

$$\bar{u}(\bar{p},s)\, u(\bar{p},s') = 2m \cdot \delta_{ss'}$$
$$\bar{v}(\bar{p},s)\, v(\bar{p},s') = -2m \cdot \delta_{ss'}$$
$$\bar{u}v = \bar{v}u = 0 .$$

Von hier folgt (vgl. Übungen): $C = -C' = \dfrac{1}{\sqrt{E_{\bar{p}} + m}}$, $u^+u = v^+v = 2E_{\bar{p}} \cdot \delta_{ss'}$.

Vollständigkeitsrelation

Wie schon mit den Polarisationszuständen von Photonen, werden wir später einen Ausdruck für die Summe über den verschiedenen Spinzuständen brauchen:

$$u_\alpha(\bar{p},s)\, \bar{u}_\beta(\bar{p},s) = C^2 (\not{p}+m)_{\alpha\varkappa} \begin{pmatrix} \xi_s \\ 0 \end{pmatrix}_\varkappa (\xi_s^T \; 0)_\lambda \, (p_\mu \gamma^{\mu +} + m)_{\lambda\delta}\, \gamma^0_{\delta\beta}$$

$$\begin{pmatrix} \xi_+ \\ 0 \end{pmatrix}_\varkappa (\xi_+^T \; 0)_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_\varkappa (1\,0\,0\,0)_\lambda = \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}_{\varkappa\lambda}$$

$$\sum_s \begin{pmatrix} \xi_s \\ 0 \end{pmatrix}_\varkappa (\xi_s^T \; 0)_\lambda = \quad \dots \quad = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{\varkappa\lambda}$$

$$\Rightarrow \sum_s u_\alpha(\bar{p},s)\bar{u}_\beta(\bar{p},s) = \frac{1}{p^0+m} \left[(\not{p}+m) \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \gamma^0 (\not{p}+m) \right]_{\alpha\beta}$$

$$= \frac{1}{p^0+m} \left[\begin{pmatrix} p_0+m & -\bar{p}\cdot\bar{\sigma} \\ \bar{p}\cdot\bar{\sigma} & -p_0+m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0+m & -\bar{p}\cdot\bar{\sigma} \\ \bar{p}\cdot\bar{\sigma} & -p_0+m \end{pmatrix} \right]_{\alpha\beta}$$

$$= \frac{1}{p^0+m} \left[\begin{pmatrix} p_0+m & -\bar{p}\cdot\bar{\sigma} \\ \bar{p}\cdot\bar{\sigma} & -p_0+m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0+m & -\bar{p}\cdot\bar{\sigma} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_{\alpha\beta}$$

$$= \frac{1}{p^0+m} \begin{pmatrix} (p_0+m)^2 & -\bar{p}\cdot\bar{\sigma} \times (p_0+m) \\ \bar{p}\cdot\bar{\sigma} \times (p_0+m) & -\bar{p}^2 \end{pmatrix}_{\alpha\beta} \qquad \left| \begin{array}{l} p_0^2 = \bar{p}^2 + m^2 \\ -\bar{p}^2 = m^2 - p_0^2 \\ \quad = (m-p_0)(m+p_0) \end{array} \right.$$

$$= \begin{pmatrix} p_0+m & -\bar{p}\cdot\bar{\sigma} \\ \bar{p}\cdot\bar{\sigma} & -p_0+m \end{pmatrix}_{\alpha\beta} = (\not{p}+m)_{\alpha\beta} \quad !$$

Gleicherweise $\displaystyle\sum_s v_\alpha(\bar{p},s)\,\bar{v}_\beta(\bar{p},s) = (\not{p}-m)_{\alpha\beta} \quad !$

Physikalische Interpretation

Die physikalische Interpretation der Lösung als Teilchen / Antiteilchenzustände kann wieder nur durch eine "zweite Quantisierung" gefunden werden. Eine ordentliche "Herleitung" folgt in der Vorlesung über Quantenfeldtheorie; hier erwähnen wir nur die wichtigsten Ergebnisse.

Feldoperatoren:

$$\hat{\psi} \equiv \int \frac{d^3\vec{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}}} \sum_{s=\pm 1} \left[\hat{a}_{\vec{p}}^{(s)} u(\vec{p},s) e^{-ip\cdot x} + \hat{b}_{\vec{p}}^{+(s)} v(\vec{p},s) e^{+ip\cdot x} \right]$$

$$\hat{\bar{\psi}} \equiv \int \frac{d^3\vec{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}}} \sum_{s=\pm 1} \left[\hat{a}_{\vec{p}}^{+(s)} \bar{u}(\vec{p},s) e^{ip\cdot x} + \hat{b}_{\vec{p}}^{(s)} \bar{v}(\vec{p},s) e^{-ip\cdot x} \right]$$

Vertauschungsrelationen:

$$\left\{ \hat{a}_{\vec{p}}^{(s)}, \hat{a}_{\vec{p}'}^{+(s')} \right\} = \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}')\delta_{ss'} = \left\{ \hat{b}_{\vec{p}}^{(s)}, \hat{b}_{\vec{p}'}^{+(s')} \right\}$$

$$\left\{ \hat{a}_{\vec{p}}^{(s)}, \hat{a}_{\vec{p}'}^{(s')} \right\} = \ldots = 0$$

Die Objekte hier sind Antikommutators: dies führt zu Fermi-Dirac Statistik und ist eine Manifestation des Spin-Statistik-Theorems!

Hamilton-Operator:

$$\hat{H} = \int d^3\vec{p} \; E_{\vec{p}} \sum_{s=\pm 1} \left[\hat{a}_{\vec{p}}^{+(s)} \hat{a}_{\vec{p}}^{(s)} - \hat{b}_{\vec{p}}^{(s)} \hat{b}_{\vec{p}}^{+(s)} \right]$$

$$= \int d^3\vec{p} \; E_{\vec{p}} \sum_{s=\pm 1} \left[\hat{a}_{\vec{p}}^{+(s)} \hat{a}_{\vec{p}}^{(s)} + \hat{b}_{\vec{p}}^{+(s)} \hat{b}_{\vec{p}}^{(s)} - \delta^{(3)}(\vec{0}) \right] \quad \text{(vgl. S. 20!)}$$

Erhaltene Ladung:

$$\hat{Q} = \int d^3\vec{x} \; \hat{\bar{\psi}} \gamma_0 \hat{\psi}$$

$$= \int d^3\vec{p} \sum_{s=\pm 1} \left[\hat{a}_{\vec{p}}^{+(s)} \hat{a}_{\vec{p}}^{(s)} - \hat{b}_{\vec{p}}^{+(s)} \hat{b}_{\vec{p}}^{(s)} \right]$$

Interpretation:

$\hat{a}_{\vec{p}}^{(s)} \longleftrightarrow$ einlaufendes Teilchen

$\hat{a}_{\vec{p}}^{+(s)} \longleftrightarrow$ auslaufendes Teilchen

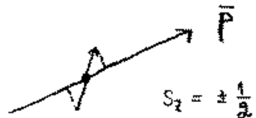
$\hat{b}_{\vec{p}}^{(s)} \longleftrightarrow$ einlaufendes Antiteilchen

$\hat{b}_{\vec{p}}^{+(s)} \longleftrightarrow$ auslaufendes Antiteilchen

2.8 Helizität

"physikalisch einfach, mathematisch kompliziert"

Helizität eines Dirac-Feldes entspricht der Polarisation eines Photons: es handelt sich um die Komponente des inneren Spins entlang der Bewegungsrichtung, mal zwei.



$S_z = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow h = \pm 1$

Mathematisch:

* Bewegungsrichtung : $\vec{e}_{\vec{p}} \equiv \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$.
* Helizität: $h(\vec{p}) \equiv \vec{e}_{\vec{p}} \cdot \vec{\Sigma}$,
$$\vec{\Sigma} \equiv \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$
* Spin entlang $\vec{e}_{\vec{p}}$: $S_{\vec{e}_{\vec{p}}} = \frac{1}{2} h(\vec{p})$.

Es kann gezeigt werden: (vgl. Übungen)

- $h^2(\vec{p}) = \mathbb{1} \Rightarrow$ die Eigenwerte sind ± 1
- $P_\pm^{(h)} = \frac{1 \pm h}{2}$ sind "Projektoren":

$$(P_\pm^{(h)})^2 = P_\pm^{(h)}, \quad P_+^{(h)} P_-^{(h)} = 0, \quad P_+^{(h)} + P_-^{(h)} = \mathbb{1}$$

$\Rightarrow$ jeder Zustand kann als $u = (P_+^{(h)} + P_-^{(h)})u$
$\equiv u_+^{(h)} + u_-^{(h)}$

geschrieben werden.

Beispiel:

Vermuten wir, daß $\vec{p} = (0,0,|\vec{p}|)$ ist.

$$\Rightarrow \quad h(\vec{p}) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$u(\vec{p},s) = \frac{1}{\sqrt{E_p + m}} \begin{pmatrix} E_p + m & 0 & -|\vec{p}| & 0 \\ 0 & E_p + m & 0 & |\vec{p}| \\ |\vec{p}| & 0 & -E_p + m & 0 \\ 0 & -|\vec{p}| & 0 & -E_p + m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_s \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{E_p + m}\; \xi_s \\ \frac{s|\vec{p}|}{\sqrt{E_p + m}}\; \xi_s \end{pmatrix}$$

$$h(\vec{p})\, u(\vec{p},s) = s\, u(\vec{p},s)$$

$\Rightarrow$ Der Helizitätseigenwert ist gleich s !

2.9 Chiralität

"mathematisch einfach, physikalisch kompliziert"

* Chiralitätoperator: $\gamma_5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$.

Es kann gezeigt werden: (vgl. Übungen)

- $\gamma_5^2 = \mathbb{1} \Rightarrow$ die Eigenwerte sind ± 1.
- $P_L \equiv \frac{1-\gamma_5}{2}$, $P_R \equiv \frac{1+\gamma_5}{2}$ sind "Projektoren":

$$P_L^2 = P_L, \quad P_R^2 = P_R, \quad P_L P_R = 0, \quad P_L + P_R = \mathbb{1}.$$

"L" steht für "linkshändig", "R" für "rechtshändig".

$\Rightarrow$ jeder Zustand kann als $u = (P_L + P_R)u$

$$\equiv u_L + u_R$$

geschrieben werden.

Physikalisch:

* Wie es sich später zeigen wird, wirken schwache Wechselwirkungen nur auf Teilchen, die linkshändig sind, also mit P_L projiziert!

* Für masselose Teilchen sind Helizität und Chiralität miteinander verbunden. Beispiel: (vgl. S. 27)

$$\vec{p} = (0,0,|\vec{p}|), \quad m = 0$$

$$\Rightarrow u(\vec{p},s) = \sqrt{|\vec{p}|}\begin{pmatrix} \xi_s \\ s\xi_s \end{pmatrix}, \quad s = \pm 1$$

$$\Rightarrow \gamma_5\, u(\vec{p},s) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}\sqrt{|\vec{p}|}\begin{pmatrix} \xi_s \\ s\xi_s \end{pmatrix} = \sqrt{|\vec{p}|}\begin{pmatrix} s\xi_s \\ \xi_s \end{pmatrix} = s\, u(\vec{p},s)$$

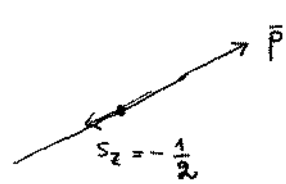
$\Rightarrow$ Der Chiralitäteigenwert ist gleich s!

* Insbesondere:

Neutrinos werden nur in schwachen Wechselwirkungen erzeugt.

$\Rightarrow$ Sie sind linkshändig $\Rightarrow s = -1$ (vgl. Übungen) (weil $m \approx 0$)

$\Rightarrow$



!