

5.2 Eigenwerte des Drehimpulses

[Münster 9.3.1; Fließbach 36]

Die Lie-Algebra des Bahndrehimpulses $\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}}$ (Seite 64; $\Psi'(\vec{r}) = e^{-\frac{i}{\hbar} \alpha \vec{r} \cdot \hat{\mathbf{L}}} \Psi(\vec{r})$)

$$[\hat{L}_j, \hat{L}_k] = i\hbar \epsilon_{jkm} \hat{L}_m$$

"Einstein-Konvention": über wiederholte Indizes wird summiert!

Dieselbe Algebra gilt aber auch für Matrixgeneratoren der $SO(3)$:

$$[\Sigma_j, \Sigma_k] = i\epsilon_{jkm} \Sigma_m \quad (\text{Seite 63; } \vec{r}' = e^{-i\alpha \vec{r} \cdot \vec{\Sigma}} \vec{r})$$

$$\Rightarrow [\hbar \Sigma_j, \hbar \Sigma_k] = i\hbar \epsilon_{jkm} \hbar \Sigma_m$$

Diese Algebra wird im Allgemeinen die "Drehimpulsalgebra" genannt. Wir bezeichnen die entsprechenden Generatoren mit $\hat{J}_i$.

Wie beim harmonischen Oszillator können die Eigenwerte und Eigenzustände rein algebraisch bestimmt werden!

Bemerkungen:

$$(i) \text{ "Kugelsymmetrie" } \Leftrightarrow [\hat{H}, \hat{J}_i] = \hat{0} \quad (\text{vgl. Aufgabe 9.4})$$

Seite 44 $\Rightarrow$ Eigenzustände von $\hat{J}_i$ sind auch Eigenzustände von $\hat{H}$.

$$(ii) \quad [\hat{J}_1, \hat{J}_2] = i\hbar \hat{J}_3 \quad ; \quad [\hat{J}_2, \hat{J}_3] = i\hbar \hat{J}_1 \quad ; \quad [\hat{J}_3, \hat{J}_1] = i\hbar \hat{J}_2$$

Seite 44 $\Rightarrow$ es gibt keine gleichzeitigen Eigenzustände von $\hat{J}_1, \hat{J}_2$ und $\hat{J}_3$.
Wir wählen im Folgenden diejenigen von $\hat{J}_3$.

$$(iii) \quad [\hat{J}^2, \hat{J}_i] \stackrel{!}{=} [\hat{J}^2, \hat{H}] = \hat{0} \quad (\text{vgl. Aufgabe 9.3})$$

$\Rightarrow \hat{J}^2$ hat gleichzeitige Eigenzustände mit $\hat{J}_3$ und $\hat{H}$.

Notation:

$$\hat{J}^2 |\lambda, m\rangle = \hbar^2 \lambda |\lambda, m\rangle,$$

$$\hat{J}_3 |\lambda, m\rangle = \hbar m |\lambda, m\rangle,$$

$$\langle \lambda, m | \lambda', m' \rangle = \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{mm'}$$

 $\hat{J}_i$ hermitisch

Es gilt:

$$\lambda \hbar^2 = \langle \lambda, m | \hat{J}^2 | \lambda, m \rangle = \sum_{i=1}^3 \langle \lambda, m | \hat{J}_i \hat{J}_i | \lambda, m \rangle = \sum_{i=1}^3 \|\hat{J}_i | \lambda, m \rangle\|^2 \geq 0.$$

Definitionen:

$$\hat{J}_+ := \hat{J}_1 + i\hat{J}_2 \quad ; \quad \hat{J}_- := \hat{J}_1 - i\hat{J}_2 \quad ; \quad \hat{J}_+^\dagger = \hat{J}_-.$$

Vertauschungen:

$$(i) \quad [\hat{J}^2, \hat{J}_\pm] = 0.$$

$$(ii) \quad [\hat{J}_3, \hat{J}_\pm] = [\hat{J}_3, \hat{J}_1] \pm i[\hat{J}_3, \hat{J}_2] = i\hbar \hat{J}_2 \pm \hbar \hat{J}_1 = \pm \hbar \hat{J}_\pm.$$

$$(iii) \quad [\hat{J}_+, \hat{J}_-] = i[\hat{J}_2, \hat{J}_1] - i[\hat{J}_1, \hat{J}_2] = 2\hbar \hat{J}_3$$

$$(iv) \quad \begin{aligned} \hat{J}^2 &= \hat{J}_1^2 + \hat{J}_2^2 + \hat{J}_3^2 = (\hat{J}_1 + i\hat{J}_2)(\hat{J}_1 - i\hat{J}_2) + \hat{J}_3^2 + i[\hat{J}_1, \hat{J}_2] \\ &= \hat{J}_+ \hat{J}_- + \hat{J}_3^2 - \hbar \hat{J}_3 \stackrel{(iii)}{=} \hat{J}_- \hat{J}_+ + \hat{J}_3^2 + \hbar \hat{J}_3 \end{aligned}$$

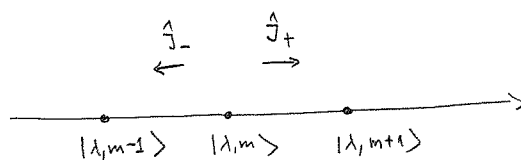
Konsequenzen:

$$(a) \quad \hat{J}^2 (\hat{J}_\pm |\lambda, m\rangle) \stackrel{(i)}{=} \hbar^2 \lambda (\hat{J}_\pm |\lambda, m\rangle)$$

$\Rightarrow$ Eigenwert von $\hat{J}^2$ wird von $\hat{J}_\pm$ nicht verändert.

$$(b) \quad \hat{J}_3 (\hat{J}_\pm |\lambda, m\rangle) = \{ \hat{J}_\pm \hat{J}_3 + [\hat{J}_3, \hat{J}_\pm] \} |\lambda, m\rangle$$

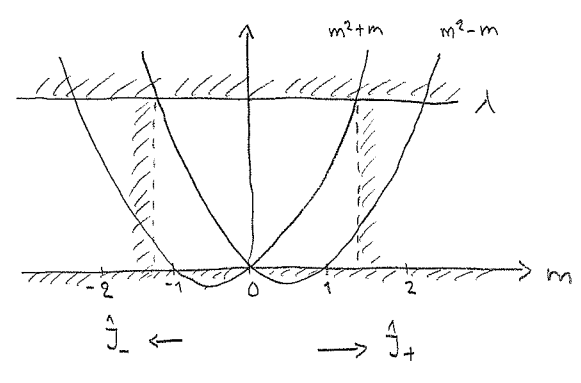
$$\stackrel{(ii)}{=} \hbar (m \pm 1) (\hat{J}_\pm |\lambda, m\rangle)$$



$$(c) \quad 0 \leq \|\hat{J}_\pm |\lambda, m\rangle\|^2 = \langle \lambda, m | \hat{J}_\mp \hat{J}_\pm | \lambda, m \rangle$$

$$\stackrel{(iv)}{=} \langle \lambda, m | \hat{J}^2 - \hat{J}_3^2 \mp \hbar \hat{J}_3 | \lambda, m \rangle = \hbar^2 (\lambda - m^2 \mp m).$$

Also gilt $0 \leq m^2 \pm m \leq \lambda$. Graphisch:



$\Rightarrow$ es muß $m_{\max} = j$ existieren, so dass $\hat{J}_+ | \lambda, j \rangle = 0$ gilt
 $\Rightarrow \| \hat{J}_+ | \lambda, j \rangle \| = 0$
 $\Rightarrow \lambda = j(j+1)$

Wegen Symmetrie ist $m_{\min} = -j$, und $\hat{J}_- | \lambda, -j \rangle = 0$ *

Die möglichen Werte von m sind also $-j, -j+1, \dots, j-1, j$.

Es gibt $2j+1$ solche Werte $\Rightarrow 2j+1 \in \mathbb{N}$
 $\Rightarrow j \in \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots\}$

Neue Notation: statt $| \lambda, m \rangle = | j(j+1), m \rangle$ einfach $| j, m \rangle$.

Fazit:
 $\hat{J}^2 | j, m \rangle = \hbar^2 j(j+1) | j, m \rangle$
 $\hat{J}_3 | j, m \rangle = \hbar m | j, m \rangle$

$j \in \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots\}$ „Drehimpuls ist quantisiert“
 $m \in \{-j, -j+1, \dots, j-1, j\}$; $2j+1$ Stück.

* Check: $\| \hat{J}_- | \lambda, m \rangle \|^2 = \hbar^2 (\lambda - m^2 + m) = \hbar^2 (j(j+1) - j^2 - j) = 0$

Appendix: Normierung der Eigenzustände (vgl. Seite 59)

$$\hat{J}_+ |j, m\rangle = C_+(j, m) |j, m+1\rangle \quad | \dots \rangle^+ \\ \langle j, m | \hat{J}_- = C_+^*(j, m) \langle j, m+1 |$$

$$\Rightarrow \underbrace{\langle j, m | \hat{J}_- \hat{J}_+ | j, m \rangle}_{(iv)} = |C_+(j, m)|^2 \underbrace{\langle j, m+1 | j, m+1 \rangle}_1$$

$$\hat{J}^2 - \hat{J}_3^2 - \hbar \hat{J}_3$$

$$\Rightarrow |C_+(j, m)|^2 = \hbar^2 [j(j+1) - m(m+1)] \\ \stackrel{!}{=} \hbar^2 (j-m)(j+m+1)$$

Mit der sogenannten „Condon-Shortley-Phasenkonvention“:

$$C_+(j, m) := \hbar \sqrt{(j-m)(j+m+1)}$$

Auf derselben Weise:

$$\hat{J}_- |j, m\rangle = C_-(j, m) |j, m-1\rangle \\ C_-(j, m) := \hbar \sqrt{(j+m)(j-m+1)}$$

Damit können alle möglichen Matricelemente berechnet werden:

$$\langle j', m' | \hat{J}_3 | j, m \rangle = \hbar m \delta_{jj'} \delta_{mm'},$$

$$\langle j', m' | \hat{J}_1 | j, m \rangle = \frac{1}{2} \langle j', m' | \hat{J}_+ + \hat{J}_- | j, m \rangle \\ = \frac{\hbar}{2} \left[C_+(j, m) \delta_{jj'} \delta_{(m+1)m'} + C_-(j, m) \delta_{jj'} \delta_{(m-1)m'} \right],$$

$$\langle j', m' | \hat{J}_2 | j, m \rangle = \frac{i}{2} \langle j', m' | \hat{J}_- - \hat{J}_+ | j, m \rangle \\ = \frac{i\hbar}{2} \left[C_-(j, m) \delta_{jj'} \delta_{(m-1)m'} - C_+(j, m) \delta_{jj'} \delta_{(m+1)m'} \right].$$

_____ o _____