

1.5 Heisenbergsche Unschärferelation

[Münster 1.5-6; Fließbach 7]

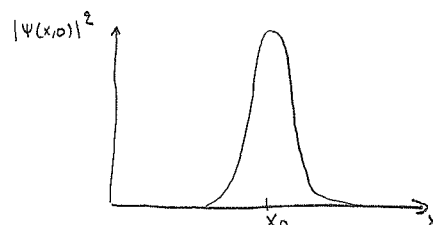
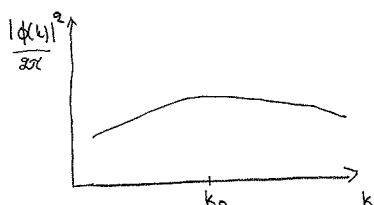
Betrachtet wird ein eindimensionales gaußches Wellenpaket [Aufgabe 2a.1]:

$$\phi(k) := N e^{-a^2(k-k_0)^2 - ikx_0}$$

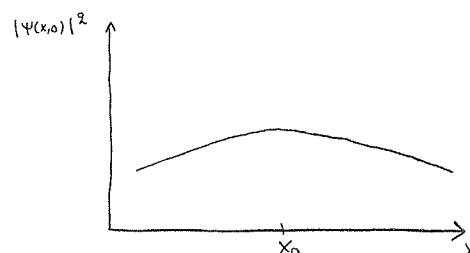
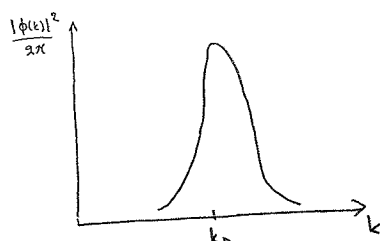
$$|\phi(k)|^2 = |N|^2 e^{-2a^2(k-k_0)^2}$$

$$|\psi(x, 0)|^2 = \frac{|N|^2}{4\pi a^2} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2a^2}}$$

$a \ll 1$:



$a \gg 1$:



Für die Erwartungswerte (Seite 11) erhält man [Aufgabe 2b.1]:

$$t = 0: \quad \begin{aligned} \langle x \rangle &= x_0 & (\Delta x)^2 &= \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = a^2 \\ \langle p \rangle &= \hbar k_0 & (\Delta p)^2 &= \langle (p - \langle p \rangle)^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{4a^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2} !$$

Für $t > 0$ gilt [Aufgabe 2b.1] $\Delta x \Delta p > \frac{\hbar}{2}$.

Diese sind Spezialfälle der Heisenbergschen Unschärferelation:
für eine beliebige Wellenfunktion und zeitgleiche Varianzen gilt

$$\boxed{\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}}$$

Beweis:

$$i\hbar = [x, \hat{p}] \quad \text{mit} \quad \hat{p} := -i\hbar \frac{d}{dx} \quad (\text{Seite 8})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow [x - \langle x \rangle, \hat{p} - \langle \hat{p} \rangle] &= (x - \langle x \rangle)(\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle) - (\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle)(x - \langle x \rangle) \\ &= [x, \hat{p}] - \langle x \rangle \hat{p} - x \langle \hat{p} \rangle + \langle x \rangle \langle \hat{p} \rangle \\ &\quad + \hat{p} \langle x \rangle + \langle \hat{p} \rangle x - \langle \hat{p} \rangle \langle x \rangle = [x, \hat{p}] = i\hbar. \end{aligned}$$

↑ eine Zahl; keine Funktion

Sei $\Psi(x)$ eine Wellenfunktion [entweder $\Psi_E(x)$ oder $\Psi(x, t)$],
normiert durch

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi^*(x) \Psi(x) = 1.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow i\hbar &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi^*(x) i\hbar \Psi(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi^*(x) (x - \langle x \rangle) \left(-i\hbar \frac{d}{dx} - \langle \hat{p} \rangle \right) \Psi(x) \\ &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi^*(x) \left(-i\hbar \frac{d}{dx} - \langle \hat{p} \rangle \right) (x - \langle x \rangle) \Psi(x) \end{aligned}$$

partielle Integration
im zweiten Term

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi^*(x) (x - \langle x \rangle) \left(-i\hbar \frac{d}{dx} - \langle \hat{p} \rangle \right) \Psi(x) \\ &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi(x) (x - \langle x \rangle) \left(+i\hbar \frac{d}{dx} - \langle \hat{p} \rangle \right) \Psi^*(x) \\ \Leftrightarrow \frac{\hbar}{2} &= \text{Im} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi^*(x) (x - \langle x \rangle) \left(-i\hbar \frac{d}{dx} - \langle \hat{p} \rangle \right) \Psi(x) \right\} \end{aligned}$$

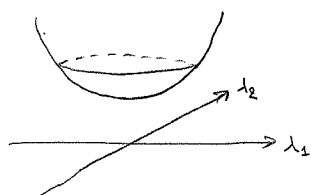
Für eine beliebige komplexe Zahl gilt $(\text{Im } z)^2 \leq |z|^2$

$$\Rightarrow \left(\frac{\hbar}{2} \right)^2 \leq \left| \int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi^*(x) (x - \langle x \rangle) \left(-i\hbar \frac{d}{dx} - \langle \hat{p} \rangle \right) \Psi(x) \right|^2.$$

Jetzt bedienen wir uns der Schwarzschen Ungleichung:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} dx u^*(x) v(x) \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} dx |u(x)|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx |v(x)|^2$$

Beweis:



$$\begin{aligned} & (\lambda_1 + i\lambda_2)(M_1 - iM_2) \\ & + (\lambda_1 - i\lambda_2)(M_1 + iM_2) \\ & = 2\lambda_1 M_1 + 2\lambda_2 M_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 & \leq f(\lambda) := \int_{-\infty}^{\infty} dx [u^*(x) - \lambda^* v^*(x)] [u(x) - \lambda v(x)] \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} dx \{ u^* u - \lambda u^* v - \lambda^* v^* u + |\lambda|^2 v^* v \} \end{aligned}$$

Seien $U := \int_{-\infty}^{\infty} dx u^* u$, $V := \int_{-\infty}^{\infty} dx v^* v$, $M = M_1 + iM_2 := \int_{-\infty}^{\infty} dx v^* u$
und $\lambda := \lambda_1 + i\lambda_2$

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= U - 2\lambda_1 M_1 - 2\lambda_2 M_2 + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) V \\ &= \left(\lambda_1 \sqrt{V} - \frac{M_1}{\sqrt{V}} \right)^2 + \left(\lambda_2 \sqrt{V} - \frac{M_2}{\sqrt{V}} \right)^2 + U - \frac{M_1^2 + M_2^2}{V} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(\lambda_{\min}) = U - \frac{|M|^2}{V} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow UV \geq |M|^2 \Leftrightarrow \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx v^* u}_M \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx u^* v}_{M^*} \leq \int_{-\infty}^{\infty} dx u^* u \int_{-\infty}^{\infty} dx v^* v. \quad \square$$

Folglich benutzen wir die Schwarzsche Ungleichung mit $\begin{cases} u(x) := \psi(x) (x - \langle x \rangle), \\ v(x) := (-i\hbar \frac{d}{dx} - \langle \hat{p} \rangle) \psi(x). \end{cases}$

$$\Rightarrow \left(\frac{\hbar}{2} \right)^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^*(x) (x - \langle x \rangle)^2 \psi(x) \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^*(x) \left(i\hbar \frac{d}{dx} - \langle \hat{p} \rangle \right) \left(-i\hbar \frac{d}{dx} - \langle \hat{p} \rangle \right) \psi(x)$$

partielle Integration $\uparrow$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^*(x) (x - \langle x \rangle)^2 \psi(x) \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^*(x) \left(-i\hbar \frac{d}{dx} - \langle \hat{p} \rangle \right)^2 \psi(x)$$

$$= (\Delta x)^2 (\Delta p)^2$$

$$\Leftrightarrow \Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad !$$

Ein "minimales" Wellenpaket erfülle die Gleichung $\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2}$.

So ein Wellenpaket sollte am nächsten einem klassischen Teilchen ähneln.

Wie sieht es aus?

(a) Seite 18 $\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi^*(x) (x - \langle x \rangle) (-i\hbar \frac{d}{dx} - \langle \hat{p} \rangle) \Psi(x)$ soll rein imaginär sein.

(b) Seite 19 $\Rightarrow \int (\lambda_{\min}) = 0 \Rightarrow |u(x) - \lambda_{\min} v(x)| = 0 \quad \forall x$
 $\Leftrightarrow u(x) = \lambda_{\min} v(x).$

Mit $u(x) = \Psi(x) (x - \langle x \rangle)$ und $v(x) = (-i\hbar \frac{d}{dx} - \langle \hat{p} \rangle) \Psi(x)$ erhalten wir:

rein imaginär $\Rightarrow 0 = \text{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi^*(x) (x - \langle x \rangle)^2 \Psi(x) \cdot \frac{1}{\lambda_{\min}} \right\} \stackrel{!}{=} (\Delta x)^2 \text{Re} \left\{ \frac{1}{\lambda_{\min}} \right\}.$

Notation:

$$\lambda_{\min} =: \frac{2a^2}{i\hbar}$$

Gleichung (b) mit dieser Notation:

$$\underbrace{(-i\hbar \frac{d}{dx} - \langle \hat{p} \rangle)}_v \Psi(x) = \underbrace{\frac{i\hbar}{2a^2}}_{1/\lambda_{\min}} \underbrace{(x - \langle x \rangle)}_u \Psi(x)$$

Seien $\langle \hat{p} \rangle =: \hbar k_0$, $\langle x \rangle =: x_0$

$$\Rightarrow \frac{d\Psi(x)}{dx} = \left[-\frac{1}{2a^2} (x - x_0) + i k_0 \right] \Psi(x)$$

$$= \left\{ \frac{d}{dx} \left[-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2} + i k_0 x + C \right] \right\} \Psi(x)$$

$$\Rightarrow \Psi(x) = D \cdot \exp \left\{ -\frac{(x-x_0)^2}{4a^2} + i k_0 x \right\},$$

$$|\Psi(x)|^2 = |D|^2 \exp \left\{ -\frac{(x-x_0)^2}{2a^2} \right\}$$

Genau das Beispiel auf Seite 17!

Fazit: Ein Teilchen $\hat{=}$ ein minimales gaußsches Wellenpaket, (anstelle einer ebenen Welle wie wir am Anfang dachten).

Aber: eine ebene Welle $\hat{=}$ ein monochromatischer Strahl von Teilchen.

