Theoretische Physik II	**Übungsblatt Nr. 10**	08.06.2006

[Di 20.06., 08:30, D6-135 / Mi 21.06., 12:15, D6-135 / Do 22.06., 14:15, C01-243]

Aufgabe 1: Wir betrachten $\hat{\vec{L}} = -i\hbar\, \vec{r} \times \nabla$ in der Ortsdarstellung mit Kugelkoordinaten, wobei $\vec{r} = (r \sin\theta \cos\phi, r \sin\theta \sin\phi, r\cos\theta)$ gilt. Leiten Sie die kartesischen Komponenten des Bahndrehimpulses her:

$$
\begin{aligned}
\hat{L}_1 &= -i\hbar\Big[-\sin\phi\,\frac{\partial}{\partial\theta} - \cos\phi\,\cot\theta\,\frac{\partial}{\partial\phi}\Big]\,, \\
\hat{L}_2 &= -i\hbar\Big[+\cos\phi\,\frac{\partial}{\partial\theta} - \sin\phi\,\cot\theta\,\frac{\partial}{\partial\phi}\Big]\,, \\
\hat{L}_3 &= -i\hbar\Big[\frac{\partial}{\partial\phi}\Big]\,.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2:

(a) Wie lautet die normierte Kugelflächenfunktion $Y_{0,0}(\theta,\phi)$?

(b) Bestimmen Sie $Y_{1,1}(\theta,\phi)$ mittels der Gleichung $\hat{L}_+ Y_{1,1}(\theta,\phi) = 0$, wobei $\hat{L}_+ = \hat{L}_1 + i\hat{L}_2$ ist, sowie mit Hilfe der Normierungsbedingung.

(c) Ausgehend von $Y_{1,1}(\theta,\phi)$, benutzen Sie $\hat{L}_- = \hat{L}_1 - i\hat{L}_2$ um $Y_{1,0}(\theta,\phi)$ und $Y_{1,-1}(\theta,\phi)$ zu bestimmen.

(d) Verifizieren Sie, daß gilt: $\hat{L}_- Y_{1,-1}(\theta,\phi) = 0$.

(e) Wie sehen die zu $Y_{1,\pm1}$ und $Y_{1,0}$ gehörigen Wahrscheinlichkeitsdichten aus?

Aufgabe 3: Zeigen Sie, daß die Operatoren $\hat{L}_3$ und $\hat{p}_3$ miteinander vertauschen und bestimmen Sie die Funktionen, die sowohl zu $\hat{L}_3$ als auch zu $\hat{p}_3$ Eigenfunktionen sind.

Aufgabe 4: Betrachten wir ein Spin-1/2-Teilchen. Nehmen Sie an, daß das Teilchen sich im Zustand $|\psi\rangle = \alpha|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle + \beta|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle$ befindet, wobei α und β Konstanten sind. Was ist $\langle \hat{S}_2^2 \rangle$, falls in diesem Zustand $\langle \hat{S}_3 \rangle = 0$ gilt?