Theoretische Physik II	**Übungsblatt Nr. 9**	01.06.2006

[Di 13.06., 08:30, D6-135 / Mi 14.06., 12:15, D6-135 /
Mi 14.06., 10:15, D6-135 (wegen Fronleichnam)]

Aufgabe 1: Betrachten Sie Drehungen um die Achse $\vec{n}$ mit dem Drehwinkel α: $\vec{r}\,' = R(\vec{n},\alpha)\,\vec{r}$. Zeigen Sie, daß gilt:

$$R(\vec{n},\alpha)\,\vec{r} = \cos(\alpha)\,\vec{r} + [1-\cos(\alpha)]\,(\vec{n}\cdot\vec{r})\,\vec{n} + \sin(\alpha)\,\vec{n}\times\vec{r}\,.$$

Aufgabe 2: Für infinitesimale Drehungen ($|\alpha| \ll 1$) gilt $R(\vec{n},\alpha) \approx \mathbb{1} - i\alpha\,\vec{n}\cdot\vec{\Sigma}$, mit

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}\,, \quad \Sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}\,, \quad \Sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

(a) Zeigen Sie, daß gilt: $[\Sigma_j, \Sigma_k] = i\epsilon_{jkm}\Sigma_m$ (mit Einstein-Konvention).

(b) Sei $\vec{n} \equiv (0,0,1)$. Zeigen Sie, daß für einen beliebigen Winkel α $\exp(-i\alpha\vec{n}\cdot\vec{\Sigma}) = R(\vec{n},\alpha)$ gilt, wobei $R(\vec{n},\alpha)$ die Matrix aus Aufgabe 1 ist.

Aufgabe 3: Die Komponenten des Bahndrehimpulsoperators lauten $\hat{L}_i = [\hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}}]_i = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk}\hat{r}_j\hat{p}_k$. Ausgehend von den Vertauschungsrelationen $[\hat{r}_i, \hat{r}_j] = [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0$, $[\hat{r}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}$, verifizieren Sie die Gültigkeit der Vertauschungsrelationen

(a) $[\hat{L}_j, \hat{L}_k] = i\hbar\,\epsilon_{jkm}\hat{L}_m$ (mit Einstein-Konvention).

(b) $[\hat{\vec{L}}^2, \hat{L}_j] = [\hat{\vec{r}}^2, \hat{L}_j] = [\hat{\vec{p}}^2, \hat{L}_j] = 0$, für $j = 1,2,3$.

Aufgabe 4: Der Hamilton-Operator eines Systems lautet

$$\hat{H} = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} + V(\hat{\vec{r}})\;.$$

Wie in der Vorlesung erwähnt, wird das System in der Quantenmechanik kugelsymmetrisch genannt, falls $\hat{H}$ mit allen Generatoren der Drehungen kommutiert, d.h.

$$[\hat{H}, \hat{L}_j] = 0\;, \quad j = 1,2,3\;.$$

Unter welchen Bedingungen ist dies der Fall?