Theoretische Physik II	**Übungsblatt Nr. 8**	23.05.2006

[Di 06.06., 08:30, D6-135 / Mi 07.06., 12:15, D6-135 / Do 08.06., 14:15, C01-243]

Aufgabe 1: Betrachten Sie den harmonischen Oszillator, mit

$$\hat{H} \equiv \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2} \; , \quad \hat{a} \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\,\hat{p} \; , \quad \hat{a}^\dagger \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} - \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\,\hat{p} \; .$$

Seien $|n\rangle$ die normierten Eigenzustände des Hamilton-Operators, mit den Eigenschaften $\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$, $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$. Berechnen Sie, für den Zustand $|n\rangle$,

(a) $\langle\hat{x}\rangle$, $\langle\hat{p}\rangle$,

(b) $\langle\hat{x}^2\rangle$, $\langle\hat{p}^2\rangle$,

(c) $\Delta x\,\Delta p$.

Aufgabe 2: Bestimmen Sie, mit Hilfe der Reihenentwicklung aus Aufgabe 5.4, den Heisenberg-Operator

$$\hat{x}_H(t) \equiv \exp\!\left(\frac{i\hat{H}t}{\hbar}\right)\hat{x}\,\exp\!\left(-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}\right) ,$$

wobei $\hat{H}$ der Hamilton-Operator des harmonischen Oszillators ist.

Aufgabe 3: Betrachten Sie die Heisenbergschen Bewegungsgleichungen

$$i\hbar\,\frac{\mathrm{d}\hat{x}_H}{\mathrm{d}t} = [\hat{x}_H, \hat{H}] \; , \quad i\hbar\,\frac{\mathrm{d}\hat{p}_H}{\mathrm{d}t} = [\hat{p}_H, \hat{H}] \; ,$$

wobei $\hat{H}$ wiederum der Hamilton-Operator des harmonischen Oszillators ist. Ausgehend von den Tatsachen, daß $\hat{H}$ mit $\hat{x}_H, \hat{p}_H$ statt $\hat{x}, \hat{p}$ ausgedrückt werden kann und daß $[\hat{x}_H(t), \hat{p}_H(t)] = i\hbar$ gilt, bestimmen Sie direkt die Lösung für $\hat{x}_H(t)$.

Aufgabe 4: Die Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren des harmonischen Oszillators genügen $[\hat{a}, \hat{a}] = [\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger] = 0$ sowie $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$. Außerdem sind die nicht-negativen ganzen Zahlen die Eigenwerte des Operators $\hat{N} \equiv \hat{a}^\dagger\hat{a}$. Betrachten Sie nun die Algebra $\{\hat{b}, \hat{b}\} = \{\hat{b}^\dagger, \hat{b}^\dagger\} = 0$, $\{\hat{b}, \hat{b}^\dagger\} = 1$ und definieren wir $\hat{Q} \equiv \hat{b}^\dagger\hat{b}$.

(a) Was für ein Spektrum und welche Eigenzustände hat $\hat{Q}$?

(b) Können Sie eine physikalische Interpretation für dieses Ergebnis vorschlagen?