Theoretische Physik II	**Übungsblatt Nr. 7**	18.05.2006

[Di 30.05., 08:30, D6-135 / Mi 31.05., 12:15, D6-135 / Do 01.06., 14:15, C01-243]

Aufgabe 1: Sei $\hat{\rho}$ ein statistischer Operator ($\hat{\rho} = \sum_n |\psi_n\rangle\, p_n\, \langle\psi_n|$, mit $0 \leq p_n \leq 1$ und $\sum_n p_n = 1$), $\hat{A}, \hat{B}$ Observablen und $|\psi\rangle$ ein beliebiger reiner Zustand. Zeigen Sie, daß im Hilbert-Raum gilt:

(a) $\mathrm{Sp}\,[\hat{A}\hat{B}] = \mathrm{Sp}\,[\hat{B}\hat{A}]$,

(b) $\mathrm{Sp}\,[|\psi\rangle\langle\psi|\hat{A}] = \langle\psi|\,\hat{A}\,|\psi\rangle$,

(c) $\hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho}$,

(d) $\mathrm{Sp}\,[\hat{\rho}] = 1$.

Aufgabe 2: Sei $\hat{p}$ ein Projektionsoperator, d.h. $\hat{p}^2 = \hat{p}$, und nehmen wir außerdem an, daß $\mathrm{Sp}\,[\hat{p}] = 1$ gilt.

(a) Zeigen Sie, daß die einzig möglichen Eigenwerte von $\hat{p}$ gleich 0 und 1 sind.

(b) Zeigen Sie, daß es nur einen linear unabhängigen Zustand mit Eigenwert 1 gibt.

Aufgabe 3: Betrachten wir einen Hilbert-Raum, der nur zwei Zustände hat, bezeichnet mit $|0\rangle$ und $|1\rangle$. Sei $|\psi\rangle = (e^{i\alpha}|0\rangle + e^{i\beta}|1\rangle)/\sqrt{2}$ ein reiner Zustand.

(a) Begründen Sie die Notation

$$\hat{\rho}(\psi) = |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & e^{i(\alpha-\beta)} \\ e^{i(\beta-\alpha)} & 1 \end{pmatrix} .$$

(b) Zeigen Sie, daß gilt: $\mathrm{Sp}\,[\hat{\rho}(\psi)] = 1$, $\mathrm{Sp}\,[\hat{\rho}^2(\psi)] = 1$.

(c) Sei nun

$$\hat{\rho}_{\text{Gemisch}} \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\alpha\, \hat{\rho}(\psi) .$$

Zeigen Sie, daß gilt: $\mathrm{Sp}\,[\hat{\rho}_{\text{Gemisch}}] = 1$, $\mathrm{Sp}\,[\hat{\rho}^2_{\text{Gemisch}}] < 1$.

Aufgabe 4: Sei $\hat{\rho} = Z^{-1}\exp(-\beta\hat{H})$, wobei $\hat{H}$ der Hamilton-Operator ist. Wie müssen β und Z gewählt werden, um $\hat{\rho}$ als einen statistischen Operator interpretieren zu können?