

[Di 23.05., 08:30, D6-135 / Mi 24.05., 12:15, D6-135 /
Mi 24.05., 10:15, D6-135 (wegen Himmelfahrt)]

Aufgabe 1: Verifizieren Sie, ausgehend von der Schwarzschen Ungleichung für einen Hilbert-Raum (Aufgabe 2 des vorigen Zettels), die Gültigkeit der allgemeinen Beziehung

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle \psi | \hat{C} | \psi \rangle| ,$$

wobei $(\Delta A)^2 \equiv \langle \psi | (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle)^2 | \psi \rangle$ und der Operator \hat{C} durch $[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{C}$ definiert ist.

Aufgabe 2: Seien $|x\rangle$ und $|y\rangle$ Eigenzustände des Ortsoperators \hat{x} . Bestimmen Sie, ausgehend vom Matrixelement $\langle x | \hat{p} | y \rangle$ aus der Vorlesung, die funktionale Form der Übergangsamplitude $\langle x | p \rangle$, wobei $|p\rangle$ ein Eigenzustand des Impulsoperators \hat{p} ist: $\hat{p}|p\rangle = p|p\rangle$. (Die Gesamtnormierung können Sie offen lassen.)

Aufgabe 3:

- (a) Sei $V(\hat{x})$ ein Polynom in \hat{x} . Was ist $[\hat{p}, V(\hat{x})]$?
- (b) Zeigen Sie, ausgehend vom Hamilton-Operator $\hat{H} = \hat{p}^2/2m + V(\hat{x})$ und dem Ehrenfestschen Theorem, $i\hbar d\langle \hat{A} \rangle/dt = \langle [\hat{A}, \hat{H}] \rangle$, daß quantenmechanische Erwartungswerte eine nahezu klassische Gleichung erfüllen:

$$m \frac{d^2}{dt^2} \langle \hat{x} \rangle = - \langle V'(\hat{x}) \rangle .$$

Es gibt hier allerdings einen Unterschied zur klassischen Dynamik. Welchen?

Aufgabe 4: Seien \hat{A} und \hat{B} zwei Operatoren, die der Vertauschungsrelationen $[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = [\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0$ genügen. Verifizieren Sie die Gültigkeit der Gleichung (ein Spezialfall der sogenannten Campbell-Baker-Hausdorff-Formel)

$$e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} = e^{\hat{A} + \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}]/2} .$$

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $\hat{C}(t) = \exp[-t(\hat{A} + \hat{B})] \exp(t\hat{A}) \exp(t\hat{B})$ und deren Differentialgleichung $d\hat{C}/dt = t[\hat{A}, \hat{B}]\hat{C}$. Hier kommt auch das Ergebnis von Aufgabe 4 des vorigen Zettels zum Tragen.

Zur Erinnerung: Um einen Übungsschein zu kriegen, muß man mindestens 50% der Aufgaben einen ernsten Versuch gegeben haben. Es wird insgesamt 12 Blätter geben.