Theoretische Physik II	**Übungsblatt Nr. 5**	04.05.2006

[Di 16.05., 08:30, D6-135 / Mi 17.05., 12:15, D6-135 / Do 18.05., 14:15, C01-243]

Aufgabe 1: Elektronen in einem Metall ($x < 0$) können näherungsweise als freie Teilchen ($V(x) = 0$) betrachtet werden. Außerhalb des Metalles ($x > 0$) fühlen sie dagegen ein Potential ($V(x) = V_0 > 0$), welches der Austrittsarbeit entspricht. Schaltet man nun ein äußeres elektrisches Feld ein, so hat das Potential die Form

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \,, \\ V_0 - Cx, & x \geq 0 \,, \end{cases}$$

wobei die Konstante C zum elektrischen Feld proportional ist. Bestimmen Sie die Tunnelwahrscheinlichkeit (laut Gamow) als Funktion der Energie E, für $0 < E < V_0$.

Aufgabe 2: Seien $|\psi\rangle, |\chi\rangle$ Vektoren eines Hilbert-Raumes. Leiten Sie die Schwarzsche Ungleichung her,

$$|\langle\psi|\chi\rangle|^2 \leq ||\psi||^2 \, ||\chi||^2 \,.$$

Aufgabe 3: Um ebene Wellen $[\psi_k(x) \equiv C \exp(ikx)]$ als normierte Zustände des Hilbert-Raumes betrachten zu können, müssen sie "regularisiert" werden. Eine Möglichkeit ist die Einführung eines sehr großen Kastens mit der Breite L und die Forderung nach sogenannten periodischen Randbedingungen: $\psi(x + L) \equiv \psi(x)$.

(a) Was sind die erlaubten Werte von k in diesem Fall?

(b) Bestimmen Sie die Konstante C, so daß die Normierungsbedingung erfüllt ist:

$$\int_{-L/2}^{L/2} \mathrm{d}x \; \psi_k^*(x)\psi_q(x) = \delta_{kq} \,.$$

Aufgabe 4: Seien $\hat{A}, \hat{B}$ zwei Operatoren. Eine Exponentialfunktion mit einem Operator $\hat{A}$ als Argument wird formal durch ihre Taylor-Reihe definiert, d.h.

$$e^{\hat{A}} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \hat{A}^n \,.$$

Zeigen Sie, daß für $t \in \mathbb{C}$ gilt:

$$e^{t\hat{A}} \, \hat{B} \, e^{-t\hat{A}} = \hat{B} + t \, [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{t^2}{2!} \, [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \frac{t^3}{3!} \, [\hat{A}, [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]]] + \ldots \,.$$