

9. Weitere Themen

A. Innerhalb der nichtrelativistischen Quantenmechanik

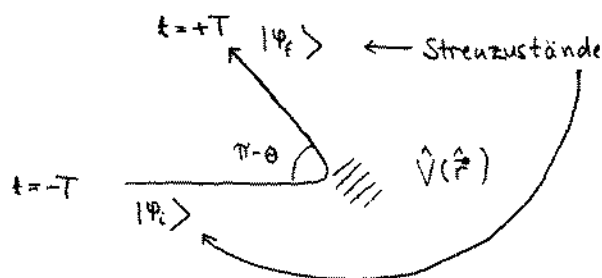
[Quantenmechanik II]

(i) Zeitabhängige Störungstheorie

Die ungestörten Zustände $|\varphi_n\rangle$ und der Hamilton-Operator $\hat{H}_0$ sind wie früher, aber die Frage lautet jetzt: mit welcher Wahrscheinlichkeit verursacht $\hat{V}$ eine Transition vom Zustand $|\varphi_i\rangle$ in den Zustand $|\varphi_f\rangle$? Die Amplitude:

$$C_{fi} = \langle \varphi_f(t=T) | \varphi_i(t=-T) \rangle = \delta_{fi} - \frac{i}{\hbar} \int_{-T}^T dt \langle \varphi_f | \hat{V}(t) | \varphi_i \rangle e^{\frac{i}{\hbar} (E_f - E_i) t} + \mathcal{O}(g^2).$$

(ii) Streutheorie



Rutherford-Formel:

$$|C_{fi}|^2 \rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left[\frac{Ze^2}{16\pi\epsilon_0 E \sin^2(\theta/2)} \right]^2$$

"Streuquerschnitt"

(iii) Wechselwirkung mit Strahlung

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\nabla\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} & ; & \quad \Phi = \text{Skalarpotential} \\ \vec{B} &= \nabla \times \vec{A} & & \quad \vec{A} = \text{Vektorpotential} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \hat{H} = \frac{1}{2m} [\hat{\vec{p}} - e\vec{A}(\hat{\vec{r}}, t)]^2 + e\Phi(\hat{\vec{r}}, t)$$

↑ wie früher
neue Effekte!

B. Verallgemeinerungen der nichtrelativistischen Quantenmechanik

Die "abstrakte" Form der Schrödinger-Gleichung, $i\hbar \frac{d}{dt} |\psi\rangle = \hat{H} |\psi\rangle$, bleibt unverändert, aber $\hat{H}$ kann ganz anders aussehen.

(i) ein Teilchen aber relativistisch [Quantenmechanik II]

Eine relativistische Gleichung muß Lorentz-kovariant sein.

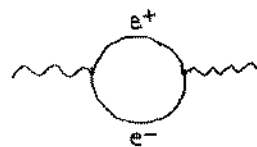
Die linke Seite ist linear in $\frac{d}{dt} \Rightarrow$ die rechte Seite muß linear in ∇ bzw. $\hat{p}$ sein! Dirac $\Rightarrow \hat{H}$ muß unbedingt eine Matrix sein! $\hat{H} = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \hat{p}_i + \beta m$; α_i, β = Matrizen.

D.h., in der nichtrelativistischen Theorie gibt es eine Möglichkeit für Spin; in der relativistischen Version ist Spin eine Notwendigkeit.

(ii) sehr viele Teilchen / unbestimmte Anzahl von Teilchen

* In der statistischen Physik gibt es oft sehr viele Teilchen ($N \sim 10^{23}$). Außerdem ist in manchen Ensembles die Teilchenzahl überhaupt keine angemessene Variable, sondern man benutzt das chemische Potential μ .

* Unter relativistischen Umständen kann die Teilchenzahl auch nicht im Voraus fixiert werden:



"virtuelles Paar"

Solche Systeme werden mit Quantenfeldtheorie beschrieben:

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2m} \hat{p}_i^2 + \dots \Rightarrow \int d^3x \left\{ \frac{1}{2m} [\partial_t \hat{\phi}(\vec{r}, t)]^2 + \dots \right\}.$$

Wie in der klassischen Mechanik gibt es auch in der Quantenmechanik mehrere mögliche "Bilder":

klassisch

Newton: $\dot{\mathbf{p}} = m\ddot{\mathbf{x}} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}$

Hamilton: $H(\mathbf{p}, \mathbf{x}), H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{x}) \quad \Leftrightarrow$

Lagrange: $L(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}), L = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}}^2 - V(\mathbf{x}) \quad \Leftrightarrow$

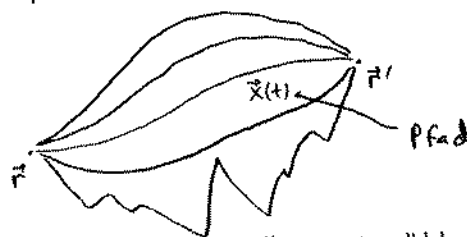
quantenmechanisch

"kanonisch": $i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi\rangle = \hat{H} |\Psi\rangle$

"Pfadintegrale"
[Feynman 1948]

Grundformel:

$$\langle \vec{r}' | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t'-t)} | \vec{r} \rangle = \int_{\vec{r}(t)=\vec{r}}^{\vec{r}(t')=\vec{r}'} \mathcal{D}\vec{x}(t) e^{\frac{i}{\hbar} \int_t^{t'} dt'' L(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x})}$$



alles ist "klassisch" (keine Operatoren!), aber man muß über alle möglichen Bahnen summieren!

Formell geht es einfach um eine Umformulierung, aber die neue Methode ist sehr elegant und "intuitiv", und erlaubt auch die Lösung von einigen Problemen, die den kanonischen Methoden sehr schwierig sind.

D. Anwendungsbereiche

* Atom- und Molekülphysik

Massenskala: $m_e = 511 \text{ keV}/c^2$

Energieskala: $E \approx \frac{1}{2} m_e c^2 \alpha^2 \approx 13,6 \text{ eV}$

Distanzskala: $a_0 \approx \frac{1}{\alpha} \frac{\hbar c}{m_e c^2} \approx 0,5 \times 10^{-10} \text{ m}$

* Kernphysik

Massenskala: $m_p = 938 \text{ MeV}/c^2$

Es gibt jetzt keine kleine Feinstrukturkonstante wie α !

Distanzskala $\gg$ Proton-Radius $\sim \frac{\hbar c}{m_p c^2} \approx 0,2 \times 10^{-15} \text{ m}$

Energieskala $\sim (m_n - m_p) c^2 \approx 1,3 \text{ MeV}$

* Elementarteilchenphysik

Distanzskala $\ll$ Proton-Radius

Energieskala $\geq m_p c^2 \sim 1 \text{ GeV}$

* Usw. usw.

_____ o _____