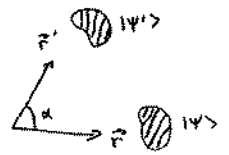


Unser Anfangspunkt für die Betrachtung von Drehungen war die Transformation

$$|\Psi'\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \alpha \hat{n} \cdot \hat{\mathbf{J}}\right) |\Psi\rangle$$



Für "skalare" Funktionen, $\Psi(\vec{r}) = \langle \vec{r} | \Psi \rangle \in \mathbb{C}$, wurde $\hat{\mathbf{J}}$ durch den Bahndrehimpulsoperator $\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}}$ realisiert.

Allerdings haben wir gesehen, daß die Drehimpulsalgebra auch durch die $SO(3)$ -Matrizen Σ_j realisiert werden kann:

$$[\hbar \Sigma_j, \hbar \Sigma_k] = i \hbar \epsilon_{jkm} \hbar \Sigma_m \quad (\text{Seite 65})$$

Also liegt eine wichtige Verallgemeinerung nahe:

$$\left[\begin{array}{l} \text{Seien } \hat{S}_j, j=1,2,3, \text{ konstante } (2s+1) \times (2s+1) \text{-Matrizen} \\ \text{mit der Eigenschaft } [\hat{S}_j, \hat{S}_k] = i \hbar \epsilon_{jkm} \hat{S}_m. \text{ Dann} \\ \text{genügen die Operatoren } \hat{J}_k \equiv \hat{L}_k + \hat{S}_k \text{ die Drehimpulsalgebra} \\ \text{(weil die gemischten Terme verschwinden).} \\ \text{Der Zustand } |\Psi\rangle \text{ hat insgesamt } (2s+1) \text{ Freiheitsgrade:} \\ \\ \langle \vec{r}, * | \Psi \rangle = \begin{pmatrix} \langle \vec{r}, s | \Psi \rangle \\ \langle \vec{r}, s-1 | \Psi \rangle \\ \vdots \\ \langle \vec{r}, -s | \Psi \rangle \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2s+1} \\ \\ \text{Wir sprechen von einem Teilchen mit Spin } s. \end{array} \right]$$

Die "alte" Wellenfunktion: $s=0$.

Mit den Matrizen $\hbar \Sigma_j$: $s=1$.

Jetzt: $s = \frac{1}{2}$!

Generatoren für $s = \frac{1}{2}$

74

Die Generatoren für eine beliebige Spinguantenzahl s können mit Hilfe der allgemeinen Ergebnisse auf Seite 68 konstruiert werden.

$$\begin{aligned} \cdot \langle \frac{1}{2}, s_3 | \hat{S}_3 | \frac{1}{2}, s_3 \rangle &= \hbar s_3 \delta_{s_3 s_3'} \xrightarrow{s_3} \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \\ &\Rightarrow \hat{S}_3 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\cdot \langle \frac{1}{2}, s_3' | \hat{S}_1 | \frac{1}{2}, s_3 \rangle = \frac{\hbar}{2} \left[\sqrt{\left(\frac{1}{2} - s_3\right)\left(\frac{3}{2} + s_3\right)} \delta_{(s_3+1)s_3'} + \sqrt{\left(\frac{1}{2} + s_3\right)\left(\frac{3}{2} - s_3\right)} \delta_{(s_3-1)s_3'} \right]$$

$$\Rightarrow \hat{S}_1 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\cdot \langle \frac{1}{2}, s_3' | \hat{S}_2 | \frac{1}{2}, s_3 \rangle = \frac{i\hbar}{2} \left[\sqrt{\left(\frac{1}{2} + s_3\right)\left(\frac{3}{2} - s_3\right)} \delta_{(s_3-1)s_3'} - \sqrt{\left(\frac{1}{2} - s_3\right)\left(\frac{3}{2} + s_3\right)} \delta_{(s_3+1)s_3'} \right]$$

$$\Rightarrow \hat{S}_2 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Wir schreiben $\hat{S}_j = \frac{\hbar}{2} \tau_j$, wobei τ_j die Pauli-Matrizen sind:

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt: $\tau_j^\dagger = \tau_j$, $\text{Sp}[\tau_j] = 0$, und (Übung)

$$\tau_j \tau_k = \delta_{jk} \mathbb{1}_{2 \times 2} + i \epsilon_{jkm} \tau_m$$

Damit gilt in der Tat

$$\begin{aligned} [\hat{S}_j, \hat{S}_k] &= \frac{\hbar^2}{4} [\tau_j, \tau_k] = \frac{\hbar^2}{4} \cdot 2i \epsilon_{jkm} \tau_m \\ &= i\hbar \epsilon_{jkm} \hat{S}_m \quad ! \end{aligned}$$

Eine mikroskopische Drehung (Übung):

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar} \alpha \vec{n} \cdot \vec{S}\right) = \exp\left(-\frac{i\alpha}{2} \vec{n} \cdot \vec{\tau}\right) = \mathbb{1}_{2 \times 2} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - i \vec{n} \cdot \vec{\tau} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

(Diese Matrix ist unitär und hat $\det=1$, gehört also zur $SU(2)$.)

Erwartungswerte

75

Mit der vektorartigen Wellenfunktion ("Spinorenwellenfunktion")

$$\langle \vec{r} | \Psi \rangle = \begin{pmatrix} \langle \vec{r} | \frac{1}{2} | \Psi \rangle \\ \langle \vec{r} | \frac{3}{2} | \Psi \rangle \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \Psi_+(\vec{r}) \\ \Psi_-(\vec{r}) \end{pmatrix}$$

Können jetzt Erwartungswerte und Wahrscheinlichkeiten auf einer offensichtlichen Weise berechnet werden.

Skalarprodukt:

$$\begin{aligned} \langle \phi | \Psi \rangle &= \int d^3\vec{r} \sum_{s_3 = +\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} \langle \phi | \vec{r}; s_3 \rangle \langle \vec{r}; s_3 | \Psi \rangle \\ &= \int d^3\vec{r} \left[\phi_+^*(\vec{r}) \Psi_+(\vec{r}) + \phi_-^*(\vec{r}) \Psi_-(\vec{r}) \right] \end{aligned}$$

Konjugierter Spinor:

$$\langle \phi | \vec{r}; s \rangle = (\phi_+^*(\vec{r}), \phi_-^*(\vec{r}))$$

Norm:

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = \int d^3\vec{r} \left[|\Psi_+(\vec{r})|^2 + |\Psi_-(\vec{r})|^2 \right]$$

Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$\begin{aligned} \text{Ort } \vec{r}, \quad \hat{S}_3\text{-Zustand } +\frac{1}{2} &: |\Psi_+(\vec{r})|^2 \\ &-\frac{1}{2} : |\Psi_-(\vec{r})|^2 \end{aligned}$$

Erwartungswert:

$$\begin{aligned} \langle \Psi | \hat{S}_j | \Psi \rangle &= \int d^3\vec{r} \sum_{s_3 = +\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} \sum_{s'_3 = +\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} \langle \Psi | \vec{r}; s'_3 \rangle \langle s'_3 | \hat{S}_j | s_3 \rangle \langle \vec{r}; s_3 | \Psi \rangle \\ &= \int d^3\vec{r} (\Psi_+^*(\vec{r}), \Psi_-^*(\vec{r})) \cdot \begin{pmatrix} \hat{S}_j \text{ als} \\ \text{Matrix} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Psi_+(\vec{r}) \\ \Psi_-(\vec{r}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Der Hamilton-Operator muß auch als eine Matrix betrachtet werden. Seine Form bestimmt, welche Operatoren gleichzeitige Eigenzustände mit $\hat{H}$ haben.

Beispiel 1

$$\hat{H} = \left\{ \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(|\hat{r}|) \right\} \mathbb{1}_{(2s+1) \times (2s+1)} \quad \text{meistens nicht explizit geschrieben}$$

Keine Abhängigkeit von $\hat{S}$

$$\Rightarrow [\hat{S}^2, \hat{H}] = [\hat{S}_3, \hat{H}] = [\hat{L}^2, \hat{H}] = [\hat{L}_3, \hat{H}] = 0.$$

Also können sowohl S_3 als auch L_3 bestimmt werden.

Beispiel 2

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(|\hat{r}|) + K \hat{L} \cdot \hat{S}$$

Jetzt gilt:

$$\begin{aligned} * [\hat{L}_i, \hat{H}] &= K [\hat{L}_i, \hat{L}_j \hat{S}_j] \\ &= K i\hbar \epsilon_{ijm} \hat{L}_m \hat{S}_j \neq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * [\hat{S}_i, \hat{H}] &= K [\hat{S}_i, \hat{L}_j \hat{S}_j] \\ &= K \hat{L}_j i\hbar \epsilon_{ijm} \hat{S}_m \neq 0. \end{aligned}$$

Aber der Gesamtdrehimpuls dient immer noch als Erhaltungsgröße:

$$\begin{aligned} * [\hat{J}_i, \hat{H}] &= [\hat{L}_i + \hat{S}_i, \hat{H}] \\ &= i\hbar K \left(\epsilon_{ijm} \hat{L}_m \hat{S}_j + \epsilon_{ijm} \hat{L}_j \hat{S}_m \right) \\ &= i\hbar K \epsilon_{ijm} (\hat{L}_m \hat{S}_j - \hat{L}_m \hat{S}_j) = 0. \end{aligned}$$