

3.3. Zeitentwicklung, Bilder

[Münster 8.1 - 8.3]

Zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung:

$$\hat{H}|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle$$

Zeitabhängige Schrödinger-Gleichung [im Schrödinger-Bild]:

$$\boxed{i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi\rangle = \hat{H} |\Psi\rangle}$$

Wir bezeichnen die Lösung mit $|\Psi(t)\rangle$ und schreiben

$$|\Psi(t)\rangle \equiv \hat{U}(t, t_0) |\Psi(t_0)\rangle,$$

wo $\hat{U}(t, t_0)$ der Zeitentwicklungsoperator heißt.

Der Zeitentwicklungsoperator erfüllt daher die Gleichungen

$$\begin{cases} i\hbar \frac{d}{dt} \hat{U}(t, t_0) = \hat{H} \hat{U}(t, t_0) \\ \hat{U}(t, t_0) = \hat{1} \end{cases}$$

Der Zeitentwicklungsoperator hat wichtige Eigenschaften:

(i) $\hat{U}(t, t_0)$ ist unitär, $\hat{U}^\dagger \hat{U} = \hat{1}$

Schrödinger für einen konjugierten Vektor:

$$\langle i\hbar \frac{d}{dt} \Psi | = -i\hbar \langle \frac{d\Psi}{dt} | = \langle \hat{H} \Psi | = \langle \Psi | \hat{H}^\dagger = \langle \Psi | \hat{H}$$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{d}{dt} \langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle = -\langle \Psi_1 | \hat{H} | \Psi_2 \rangle + \langle \Psi_1 | \hat{H} | \Psi_2 \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle \Psi_1(t) | \Psi_2(t) \rangle = \langle \Psi_1(t_0) | \hat{U}^\dagger(t, t_0) \hat{U}(t, t_0) | \Psi_2(t_0) \rangle$$

$$\text{ist zeitunabhängig} \Rightarrow \hat{U}^\dagger(t, t_0) \hat{U}(t, t_0) = \hat{1}$$

(ii) $\hat{U}(t, t_0)$ kann formal als $\hat{U}(t, t_0) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t, t_0)\right)$ geschrieben werden.

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n (t-t_0)^n \hat{H}^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^{n-1} (t-t_0)^{n-1} \hat{H}^n \\ &\stackrel{n \rightarrow n+1}{=} \hat{H} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^m (t-t_0)^m \hat{H}^m = \hat{H} \hat{U}(t, t_0) \stackrel{!}{=} \hat{U}(t, t_0) \hat{H} \end{aligned}$$

Es folgen interessante Ergebnisse:

(a) Zeitentwicklung in Energiebasis

Wir schreiben den Anfangszustand als

$$|\Psi(t_0)\rangle = \sum_E |E\rangle \langle E|\Psi\rangle \equiv \sum_E c_E |E\rangle, \quad c_E = \langle E|\Psi(t_0)\rangle.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= \sum_E c_E e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t-t_0)} |E\rangle \\ &= \sum_E c_E e^{-\frac{i}{\hbar} E(t-t_0)} |E\rangle \quad (\text{vgl. Seite 13}) \end{aligned}$$

Wahrscheinlichkeit für den Energie-Eigenwert E' :

$$P_\Psi(E') = |\langle E'|\Psi(t)\rangle|^2 = |c_{E'} e^{-\frac{i}{\hbar} E'(t-t_0)}|^2.$$

Diese bleibt unverändert, obwohl $|\Psi(t)\rangle \neq |\Psi(t_0)\rangle$!

(b) Zeitentwicklung der Erwartungswerte

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} \langle \Psi(t) | \hat{A} | \Psi(t) \rangle &= -\langle \Psi(t) | \hat{H} \hat{A} | \Psi(t) \rangle \\ &\quad + \langle \Psi(t) | \hat{A} \hat{H} | \Psi(t) \rangle \\ &= \langle \Psi(t) | [\hat{A}, \hat{H}] | \Psi(t) \rangle \end{aligned}$$

"das Ehrenfestsche Theorem"

D.h., Erwartungswert ist zeitunabhängig genau dann, wenn der Operator mit dem Hamilton-Operator vertauscht.

Eine solche Observable nennen wir Erhaltungsgröße.

Betrachten wir letztendlich Zeitabhängigkeit von einem anderen Winkel, nämlich durch die Einführung des Heisenberg-Bildes:

Schrödinger-Bild:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = \hat{H} |\Psi(t)\rangle \quad \text{"Zustände sind zeitabhängig."}$$

$$\frac{d}{dt} \hat{A} = 0 \quad \text{"Operatoren aber nicht."}$$

$$\langle \hat{A} \rangle(t) = \langle \Psi(t) | \hat{A} | \Psi(t) \rangle$$

Heisenberg-Bild:

$$\langle \hat{A}(t) \rangle = \langle \Psi(0) | \hat{U}^\dagger(t;0) \hat{A} \hat{U}(t;0) | \Psi(0) \rangle$$

$$\text{Wir definieren: } |\Psi_H\rangle \equiv |\Psi(0)\rangle$$

$$= \hat{U}^\dagger(t;0) |\Psi(t)\rangle$$

"Zustände zeitunabhängig"

$$\hat{A}_H(t) \equiv \hat{U}^\dagger(t;0) \hat{A} \hat{U}(t;0)$$

$$= e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} \hat{A} e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t}$$

"Operatoren zeitabhängig"

Physik wie Erwartungswerte bleiben unverändert.
Die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung wird aber ersetzt durch

$$\underline{i\hbar \frac{d}{dt} \hat{A}_H(t) = -\hat{A} \hat{A}_H(t) + \hat{A}_H(t) \hat{H} = [\hat{A}_H(t), \hat{H}]}$$

(vgl. Seite 45)

Zusammenfassung: Postulate der Quantenmechanik (IV) (vgl. Seite 40)

IV. Die zeitliche Entwicklung von Zuständen im Schrödinger-Bild wird durch die Schrödinger-Gleichung bestimmt:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = \hat{H} |\Psi(t)\rangle,$$

wo $\hat{H}$ der Hamilton-Operator ist.

Appendix : Einsicht in Quantisierung

48

Die klassischen Bewegungsgleichungen können auch in verschiedenen "Bildern" dargestellt werden.

Newton : $\dot{p} = m\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}$

Hamilton : $H(p, x) = \frac{p^2}{2m} + V(x)$; x, p formal unabhängig

Poisson-Klammer:

$$\{F, G\} \equiv \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial G}{\partial x}$$

Dann gilt:

$$\{x, x\} = 0$$

$$\{p, p\} = 0$$

$$\{x, p\} = 1$$

$$\dot{x} = \{x, H\} = \frac{p}{m}$$

$$\dot{p} = \{p, H\} = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

} "kanonische Normierung" *

} "Dynamik"

Quantisierung : $x \rightarrow \hat{x}, p \rightarrow \hat{p}, \{\cdot, \cdot\} \rightarrow \frac{1}{i\hbar} [\cdot, \cdot]$

$$[\hat{x}, \hat{x}] = 0$$

$$[\hat{p}, \hat{p}] = 0$$

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$

} gleichzeitige Vertauschungsrelationen: "kanonische Normierung"

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{x}(t) = [\hat{x}, \hat{H}]$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{p}(t) = [\hat{p}, \hat{H}]$$

} "Dynamik" im Heisenberg-Bild

* Kanonische Transformation: $X = X(x, p), P = P(x, p)$ so daß
 $\{F, G\}_{XP} = \{F, G\}_{xp}$. Es gilt:

