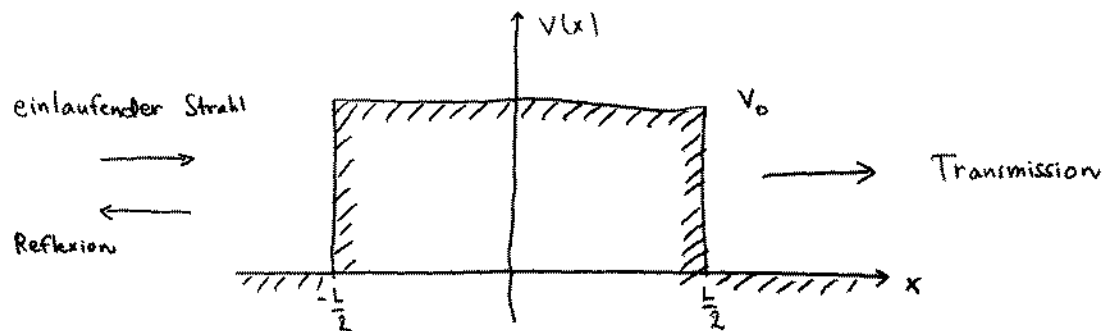


Betrachten wir eine Potentialbarriere statt Kastenpotential.



Klassisch:

$$E < V_0 : R = 1, T = 0.$$

$$E > V_0 : R = 0, T = 1.$$

Quantenmechanisch:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \psi_E(x) = E \psi_E(x)$$

Der einzige Unterschied zum Kapitel 2.3 ist was für $|x| < L/2$ passiert.

Früher:

$$\psi_E'' = -k^2 \psi_E ; \quad k^2 \equiv \frac{2m(E + V_0)}{\hbar^2} > 0.$$

$$\text{Jetzt: } \psi_E'' = \kappa^2 \psi_E ; \quad \kappa^2 \equiv \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2} > 0.$$

(für $0 < E < V_0$)

Früher:

$$\frac{C}{A} = e^{-ik_0 L} \left[\frac{e^{ikL} + e^{-ikL}}{2} + \left(\frac{k_0}{k} + \frac{k}{k_0} \right) \frac{e^{-ikL} - e^{ikL}}{4} \right]^{-1}$$

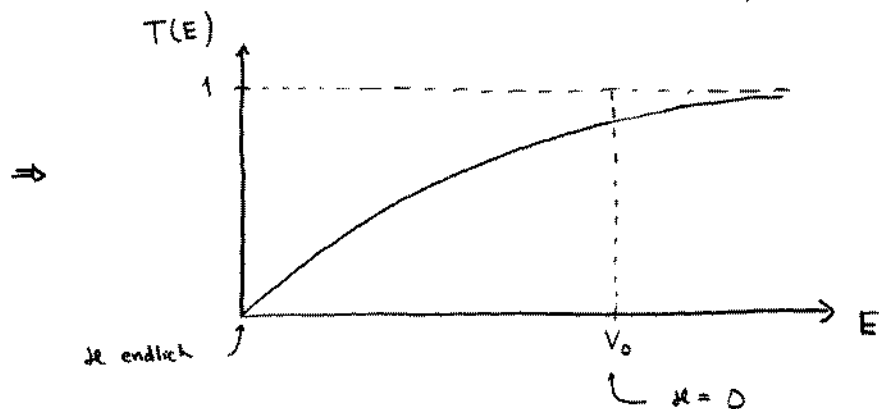
Jetzt $k \rightarrow i\kappa$:

$$\frac{C}{A} = e^{-ik_0 L} \left[\cosh(\kappa L) + i \left(\frac{\kappa}{k_0} - \frac{k_0}{\kappa} \right) \frac{\sinh(\kappa L)}{2} \right]^{-1}$$

$$\Rightarrow T(E) = \frac{|C|^2}{|A|^2} = \left\{ \cosh^2(\kappa L) + \left[\left(\frac{\kappa}{k_0} - \frac{k_0}{\kappa} \right) \frac{\sinh(\kappa L)}{2} \right]^2 \right\}^{-1}$$

$$\stackrel{\text{cosh}^2 - \sinh^2 = 1}{=} \left\{ 1 + \left[\left(\frac{\kappa}{k_0} + \frac{k_0}{\kappa} \right) \frac{\sinh(\kappa L)}{2} \right]^2 \right\}^{-1}$$

Hier ist $\left(\frac{\kappa}{k_0} + \frac{k_0}{\kappa}\right)^2 = \frac{(\kappa^2 + k_0^2)^2}{k_0^2 \kappa^2} = \frac{V_0^2}{E(V_0 - E)}$



Also quantenmechanisch ist $T > 0$ auch für $E < V_0$; dies wird Tunneleffekt genannt, und $T(E)$ heißt Tunnelwahrscheinlichkeit.

Betrachten wir genauer das Verhalten für $E \ll V_0$.

$$\left(\frac{\kappa}{k_0} + \frac{k_0}{\kappa}\right)^2 \approx \frac{V_0}{E} \gg 1$$

$$\Rightarrow T(E) \approx \frac{4E}{V_0} \sinh^{-2}(\kappa L)$$

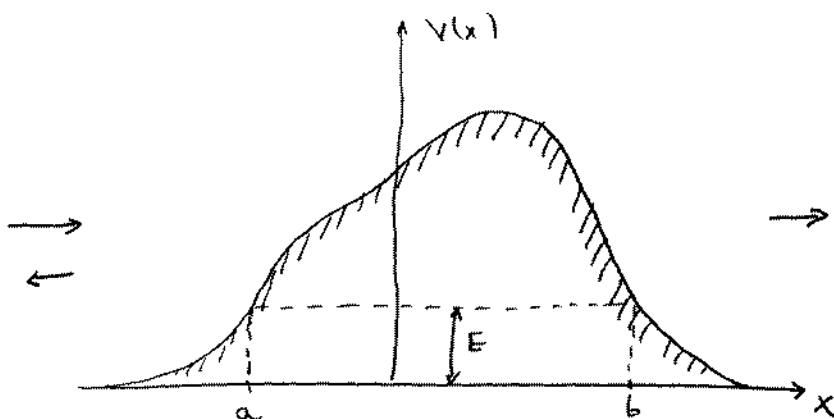
Falls weiterhin $\kappa L \gg 1$, ist $\sinh(\kappa L) \approx \frac{e^{\kappa L}}{2}$, und

$$T(E) \approx 16 \frac{E}{V_0} e^{-2 \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}} L}$$

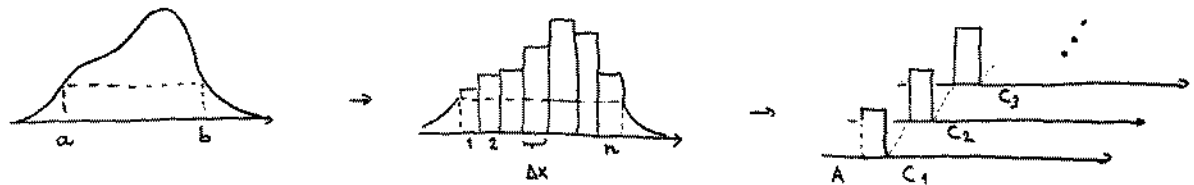
In dem klassischen Limes $\hbar \rightarrow 0$ ist also tatsächlich $T(E) = 0$!

— 0 —

Verallgemeinerung:



Eine Näherung:



$$T(E) \approx \frac{|C|^2}{|A|^2} \approx \frac{|C_1|^2}{|A|^2} \cdot \frac{|C_2|^2}{|C_1|^2} \cdots \frac{|C|^2}{|C_{n-1}|^2} = T_1(E) T_2(E) \cdots T_n(E)$$

Nehmen wir weiterhin an, daß der Koeffizient der Exponentialfunktion weniger wichtig ist als das Argument ($\approx$ Sattelpunktnäherung). Dann gilt

$$T(E) \approx \prod_{i=1}^n T_i(E) \approx \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \frac{g}{\hbar} \sqrt{2m[V(x_i) - E]} \Delta x \right\}.$$

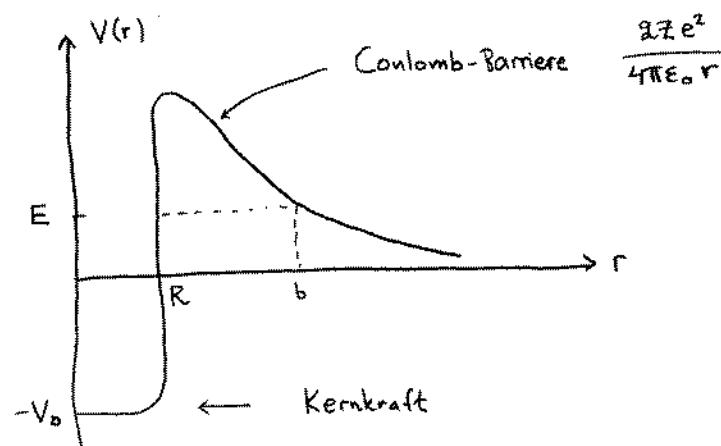
Für $n \rightarrow \infty$ und $\Delta x \rightarrow 0$ wird von der Summe ein Integral:

$$T(E) \approx \exp \left\{ - \frac{g}{\hbar} \int_a^b dx \sqrt{2m[V(x) - E]} \right\} \quad (*)$$

Diese Formel nennen wir den Gamow-Faktor; a, b sind die klassischen Umkehrpunkte.

Bemerkungen:

- (i) Es gibt eine sehr schöne Herleitung des Gamow-Faktors sowie des Koeffizienten der Exponentialfunktion durch die Pfadintegralformulierung der Quantenmechanik [QM II]. Man findet, unter anderem, daß (*) eine zuverlässige Näherung ist, falls $T(E) \ll 1$ gilt (d.h. in dem "semiklassischen" Bereich).
- (ii) Der Tunneffekt hat viele sehr wichtige Anwendungen, wie Rastertunnelmikroskopie, Josephson-Effekt in Supraleitern, Diode, usw. Wir betrachten ein Beispiel von der Kernphysik, den α -Zerfall.

α -Zerfall

Die klassischen Umkehrpunkte: $a = R \propto Z^{\frac{1}{3}}$

$$b \propto \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 E}$$

Für kleine Energien gilt $b \gg a$.

Die Exponente:

$$\begin{aligned}
 G &= \frac{2}{\hbar} \int_a^b dr \sqrt{2m \left[\frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} - E \right]} \\
 &= \frac{2}{\hbar} \sqrt{\frac{4mZe^2}{4\pi\epsilon_0}} \int_a^b dr \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{b}} \\
 r = b \cdot x &\quad \Rightarrow \quad = \frac{2}{\hbar} \cdot \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \sqrt{\frac{2m}{E}} \int_{a/b}^1 dx \sqrt{\frac{1-x}{x}} \\
 &\quad \quad \quad \underbrace{\int_{a/b}^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}} dx}_{\frac{\pi}{2} - 2\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}} + O\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{5}{2}} \text{ für } \frac{a}{b} \ll 1,} \\
 \text{wo } \frac{a}{b} &= \frac{4\pi\epsilon_0 ER}{2Ze^2} \propto \frac{E}{Z^{2/3}}
 \end{aligned}$$

Damit findet man eine bestimmte Beziehung zwischen

- * der Zerfallsrate $\Gamma(E) \propto T(E) \propto \exp[-G(E)]$,
- * der Energie E des auslaufenden α -Teilchens,
- * der Ladungszahl Z des Restkernes.

Die Übereinstimmung mit Experiment ist sehr gut, was als einer der frühen großen Erfolge der Quantenmechanik gilt.