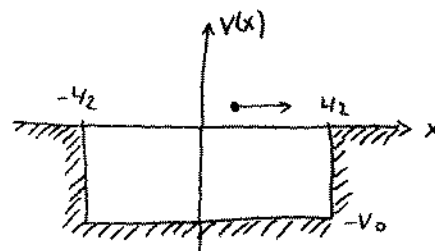


2.3 Streuung vom Kastenpotential [Münster 3.2.2]

29

Wir kehren zurück zum Kastenpotential auf Seite 21, aber betrachten jetzt Energien $E > 0$.



Notation:

$$E \equiv \frac{\hbar^2 k_0^2}{2m} \quad ; \quad E + V_0 \equiv \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$$\underline{\underline{x < -\frac{L}{2}}}$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \right] \psi_E(x) = E \psi_E(x)$$

$$\Leftrightarrow \psi_E'' = -k_0^2 \psi_E$$

$$\psi_E = A e^{ik_0 x} + B e^{-ik_0 x}$$

Diese Wellenfunktion ist im gewöhnlichen Sinne ($\int_{-\infty}^{\infty} dx |\psi_E(x)|^2 = 1$) nicht normierbar. Es handelt sich um einen Streuzustand. Trotzdem hat der Wahrscheinlichkeitsstrom $\vec{j}$ (Seite 9) eine physikalisch sinnvolle Form:

$$\begin{aligned} \vec{j} &= \frac{\hbar}{m} \operatorname{Im} \left\{ \psi_E^* \frac{d}{dx} \psi_E \right\} \\ &= \frac{\hbar k_0}{m} \operatorname{Im} \left\{ (A^* e^{-ik_0 x} + B^* e^{ik_0 x}) i (A e^{ik_0 x} - B e^{-ik_0 x}) \right\} \\ &= \frac{\hbar k_0}{m} \operatorname{Im} \left\{ i \underbrace{(|A|^2 - |B|^2)}_{\text{reell}} + \underbrace{AB^* e^{2ik_0 x} - A^* B e^{-2ik_0 x}}_{\text{imaginär}} \right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{\hbar k_0}{m} |A|^2 - \frac{\hbar k_0}{m} |B|^2$$

Geschwindigkeit



Strahl
nach rechts



Strahl
nach links

$$\underline{\underline{x > \frac{L}{2}}}$$

$$\Psi_E'' = -k_0^2 \Psi_E$$

$$\Psi_E = C e^{ik_0 x} + D e^{-ik_0 x}$$

Jetzt stellen wir uns das folgende Experiment vor:



D.h., wir verlangen als Randbedingung, daß es auf der rechten Seite keinen linkslaufenden Strahl gibt

$$\Rightarrow \underline{\underline{D = 0}}$$

$$\underline{\underline{-\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2}}}$$

$$\Psi_E'' = -k^2 \Psi_E$$

$$\Psi_E = F e^{ikx} + G e^{-ikx}$$

Anschlußbedingungen

Ψ_E & Ψ_E' stetig am $x = \pm \frac{L}{2}$:

$$x = -\frac{L}{2}: \quad A e^{-\frac{ik_0 L}{2}} + B e^{\frac{ik_0 L}{2}} = F e^{-\frac{ikL}{2}} + G e^{\frac{ikL}{2}} \quad (a)$$

$$ik_0 (A e^{-\frac{ik_0 L}{2}} - B e^{\frac{ik_0 L}{2}}) = ik (F e^{-\frac{ikL}{2}} - G e^{\frac{ikL}{2}}) \quad (b)$$

$$x = \frac{L}{2}: \quad C e^{\frac{ik_0 L}{2}} = F e^{\frac{ikL}{2}} + G e^{-\frac{ikL}{2}} \quad (c)$$

$$ik_0 C e^{\frac{ik_0 L}{2}} = ik (F e^{\frac{ikL}{2}} - G e^{-\frac{ikL}{2}}) \quad (d)$$

Vier Gleichungen, fünf Koeffizienten $\Rightarrow \exists$ Lösung $\forall k_0$! Also keine Quantisierung! Aber versuchen wir F und G zu eliminieren.

$$ik \cdot (c) + (d) \Rightarrow 2ik F e^{\frac{ikL}{2}} = i(k+k_0) C e^{\frac{ik_0 L}{2}}$$

$$\Leftrightarrow F = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{k_0}{k}\right) C e^{\frac{i(k_0-k)L}{2}}$$

$$-ik \cdot (c) + d \Rightarrow -2ik G e^{-\frac{ikL}{2}} = i(-k+k_0) C e^{\frac{ik_0 L}{2}}$$

$$\Leftrightarrow G = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{k_0}{k}\right) C e^{\frac{i(k_0+k)L}{2}}$$

$$\begin{aligned}
 k \cdot (a) &\Rightarrow k \left(A e^{-\frac{ik_0 L}{2}} + B e^{\frac{ik_0 L}{2}} \right) = \frac{C}{2} \left[(k+k_0) e^{i\left(\frac{k_0}{2}-k\right)L} + (k-k_0) e^{i\left(\frac{k_0}{2}+k\right)L} \right] & (e) \\
 \frac{1}{i} \cdot (b) &\Rightarrow k_0 \left(A e^{-\frac{ik_0 L}{2}} - B e^{\frac{ik_0 L}{2}} \right) = \frac{C}{2} \left[(k+k_0) e^{i\left(\frac{k_0}{2}-k\right)L} - (k-k_0) e^{i\left(\frac{k_0}{2}+k\right)L} \right] & (f)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{k} (e) + \frac{1}{k_0} (f) &\Rightarrow 2A e^{-\frac{ik_0 L}{2}} = \frac{C}{2} \left[\left(2 + \frac{k_0}{k} + \frac{k}{k_0}\right) e^{i\left(\frac{k_0}{2}-k\right)L} + \left(2 - \frac{k_0}{k} - \frac{k}{k_0}\right) e^{i\left(\frac{k_0}{2}+k\right)L} \right] \\
 A &= C e^{ik_0 L} \left[\frac{e^{ikL} + e^{-ikL}}{2} + \left(\frac{k_0}{k} + \frac{k}{k_0}\right) \frac{e^{-ikL} - e^{ikL}}{4} \right]
 \end{aligned}$$

Definition:

$$\text{Transmissionskoeffizient} \equiv T \equiv \frac{|\hat{j}(x > \frac{L}{2}; \text{rechts})|}{|\hat{j}(x < -\frac{L}{2}; \text{rechts})|} = \frac{|C|^2}{|A|^2}$$

$$\text{Reflexionskoeffizient} \equiv R \equiv \frac{|\hat{j}(x < -\frac{L}{2}; \text{links})|}{|\hat{j}(x < -\frac{L}{2}; \text{rechts})|} = \frac{|B|^2}{|A|^2}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow T^{-1} &= \left[\cos kL + \left(\frac{k_0}{k} + \frac{k}{k_0}\right) \frac{\sin kL}{2i} \right] \left[\cos kL - \left(\frac{k_0}{k} + \frac{k}{k_0}\right) \frac{\sin kL}{2i} \right] \\
 &= \cos^2 kL + \left(\frac{k_0}{k} + \frac{k}{k_0}\right)^2 \frac{\sin^2 kL}{4} = 1 + \frac{(k_0^2 - k^2)^2}{4k^2 k_0^2} \sin^2 kL
 \end{aligned}$$

$$T = \frac{1}{1 + \left[\left(\frac{k_0}{k} - \frac{k}{k_0}\right) \frac{\sin kL}{2} \right]^2}, \quad k_0 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}, \quad k = \sqrt{\frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}}$$

Aufgabe 4.1:

$$R = \frac{\left[\left(\frac{k_0}{k} - \frac{k}{k_0}\right) \frac{\sin kL}{2} \right]^2}{1 + \left[\left(\frac{k_0}{k} - \frac{k}{k_0}\right) \frac{\sin kL}{2} \right]^2}$$

Damit gilt $0 \leq T \leq 1$, $0 \leq R \leq 1$, $T + R = 1$!

D.h. die Gesamtwahrscheinlichkeit bleibt erhalten.

Betrachten wir etwas genauer die Energieabhängigkeit des Transmissionskoeffizienten.

$$\left(\frac{k_0}{k} - \frac{k}{k_0}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{E+V_0}} - \frac{\sqrt{E+V_0}}{\sqrt{E}}\right)^2 = \frac{V_0^2}{E(E+V_0)}$$

$$\Rightarrow T(E) = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(E+V_0)} \sin^2 kL} \quad \text{mit} \quad k = \sqrt{\frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}}$$

Dies ist im Allgemeinen eine wachsende Funktion der Energie, mit $\lim_{E \rightarrow \infty} T(E) = 1$. D.h., ein Teilchen mit großer Energie $E \gg V_0$ läuft einfach durch den Kasten, ohne irgendetwas zu bemerken.

Falls aber $kL = n\pi$, $n=1,2,\dots$, ist $T(E)=1$ schon mit einer endlichen Energie! Wir sprechen von einer Resonanz.

Die Resonanzenergien erfüllen

$$\sqrt{\frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}} L = n\pi \Rightarrow E = -V_0 + \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2mL^2}$$

Physikalisch:

die bei $x = \frac{L}{2}$ und bei $x = -\frac{L}{2}$ reflektierten Wellen interferieren destruktiv, so daß alles transmittiert wird. Also es gibt doch noch eine "Quantisierung" auch in der Streuung!

Graphisch:

