

1.5 Heisenbergsche Unschärferelation

[Münster 1.6]

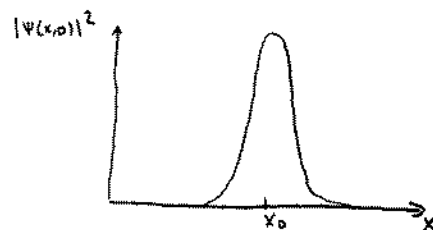
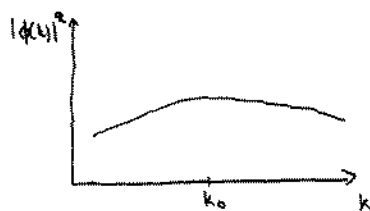
Betrachten wir ein eindimensionales gaußsches Wellenpaket [Aufgabe 2.4]:

$$\phi(k) \equiv N e^{-a^2(k-k_0)^2 - ikx_0}$$

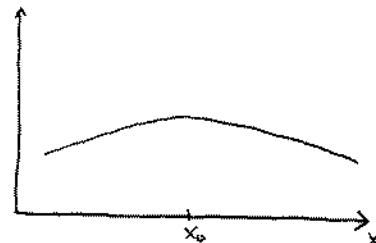
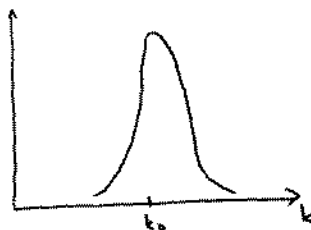
$$|\phi(k)|^2 = |N|^2 e^{-2a^2(k-k_0)^2}$$

$$|\psi(x, 0)|^2 = \frac{|N|^2}{4\pi a^2} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2a^2}}$$

Für $a \ll 1$:



Für $a \gg 1$:



Für die Erwartungswerte (Seite 11) kriegt man (Aufgabe 3.1):

$$t=0: \quad \langle x \rangle = x_0 \quad (\Delta x)^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = a^2$$

$$\langle p \rangle = \hbar k_0 \quad (\Delta p)^2 = \langle (p - \langle p \rangle)^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{4a^2}$$

$$\Rightarrow \Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2} !$$

Für $t > 0$ gilt (Aufgabe 3.1) $\Delta x \Delta p > \frac{\hbar}{2}$.

Diese sind Spezialfälle der Heisenbergschen Unschärferelation:
für eine beliebige Wellenfunktion und zeitgleiche Varianzen gilt

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Beweis:

$$i\hbar = [x, p] \quad \text{mit} \quad p = -i\hbar \frac{d}{dx} \quad (\text{Seite 8})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow [x - \langle x \rangle, p - \langle p \rangle] &= (x - \langle x \rangle)(p - \langle p \rangle) - (p - \langle p \rangle)(x - \langle x \rangle) \\ &= [x, p] - \langle x \rangle p - x \langle p \rangle + \langle x \rangle \langle p \rangle \\ &\quad + p \langle x \rangle + \langle p \rangle x - \langle p \rangle \langle x \rangle = [x, p] = i\hbar. \end{aligned}$$

↑ eine Zahl; keine Funktion

Sei $\Psi(x)$ eine Wellenfunktion [entweder $\Psi_E(x)$ oder $\Psi(x, t)$],
normiert durch

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi^*(x) \Psi(x) = 1.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow i\hbar &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi^*(x) i\hbar \Psi(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi^*(x) (x - \langle x \rangle) \left(-i\hbar \frac{d}{dx} - \langle p \rangle \right) \Psi(x) \\ &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi^*(x) \left(-i\hbar \frac{d}{dx} - \langle p \rangle \right) (x - \langle x \rangle) \Psi(x) \end{aligned}$$

partielle Integration
im zweiten Term

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi^*(x) (x - \langle x \rangle) \left(-i\hbar \frac{d}{dx} - \langle p \rangle \right) \Psi(x) \\ &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi(x) (x - \langle x \rangle) \left(+i\hbar \frac{d}{dx} - \langle p \rangle \right) \Psi^*(x) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{i\hbar}{2} = \text{Im} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi^*(x) (x - \langle x \rangle) \left(-i\hbar \frac{d}{dx} - \langle p \rangle \right) \Psi(x) \right\}.$$

Für eine beliebige komplexe Zahl gilt $(\text{Im } z)^2 \leq |z|^2$

$$\Rightarrow \left(\frac{i\hbar}{2} \right)^2 \leq \left| \int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi^*(x) (x - \langle x \rangle) \left(-i\hbar \frac{d}{dx} - \langle p \rangle \right) \Psi(x) \right|^2.$$

Jetzt benutzen wir die Schwarzsche Ungleichung:

$$|\int dx u^*(x) v(x)|^2 \leq \int dx |u(x)|^2 \int dx |v(x)|^2$$

Beweis: $0 \leq f(\lambda) \equiv \int dx [u^*(x) - \lambda^* v^*(x)] [u(x) - \lambda v(x)]$

$$= \int dx \{ u^* u - \lambda u^* v - \lambda^* v^* u + |\lambda|^2 v^* v \}$$

Seien $U \equiv \int dx u^* u$, $V \equiv \int dx v^* v$, $M = M_1 + iM_2 = \int dx v^* u$
und $\lambda \equiv \lambda_1 + i\lambda_2$

$$\Rightarrow f(\lambda) = U - 2\lambda_1 M_1 - 2\lambda_2 M_2 + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) V$$

$$= \left(\lambda_1 \sqrt{V} - \frac{M_1}{\sqrt{V}} \right)^2 + \left(\lambda_2 \sqrt{V} - \frac{M_2}{\sqrt{V}} \right)^2 + U - \frac{M_1^2 + M_2^2}{V}$$

$$\Rightarrow f(\lambda_{\min}) = U - \frac{|M|^2}{V} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow UV \geq |M|^2 \Leftrightarrow \int dx v^* u \int dx u^* v \leq \int dx u^* u \int dx v^* v.$$

□.

Jetzt benutzen wir diese Ungleichung mit $\begin{cases} u(x) \equiv \Psi(x) (x - \langle x \rangle) \\ v(x) \equiv (-i\hbar \frac{d}{dx} - \langle p \rangle) \Psi(x) \end{cases}$

$$\Rightarrow \left(\frac{\hbar}{2} \right)^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi^*(x) (x - \langle x \rangle)^2 \Psi(x) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi^*(x) \left(i\hbar \frac{d}{dx} - \langle p \rangle \right) \left(-i\hbar \frac{d}{dx} - \langle p \rangle \right) \Psi(x)$$

partielle
Integration $\int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi^*(x) (x - \langle x \rangle)^2 \Psi(x) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi^*(x) \left(-i\hbar \frac{d}{dx} - \langle p \rangle \right)^2 \Psi(x)$

$$= (\Delta x)^2 (\Delta p)^2$$

$$\Leftrightarrow \Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} !$$

Ein "minimales" Wellenpaket erfüllt die Gleichung $\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2}$.

So ein Wellenpaket sollte am nächsten einem klassischen Teilchen ähneln.

Wie sieht es aus?

(a) Seite 18 $\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi^*(x) (x - \langle x \rangle) (-i\hbar \frac{d}{dx} - \langle p \rangle) \Psi(x)$ soll rein imaginär sein.

(b) Seite 19 $\Rightarrow \dagger(\lambda_{\min}) = 0 \Rightarrow |u(x) - \lambda_{\min} v(x)| = 0 \quad \forall x$
 $\Leftrightarrow u(x) = \lambda_{\min} v(x).$

Mit $u(x) = \Psi(x) (x - \langle x \rangle)$ und $v(x) = (-i\hbar \frac{d}{dx} - \langle p \rangle) \Psi(x)$ gibt (a) jetzt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi^*(x) (x - \langle x \rangle)^2 \Psi(x) \cdot \frac{1}{\lambda_{\min}} = \frac{(\Delta x)^2}{\lambda_{\min}} \quad \text{soll rein imaginär sein.}$$

Notation:

$$\lambda_{\min} \equiv \frac{2a^2}{i\hbar}$$

Gleichung (b) wird:

$$(-i\hbar \frac{d}{dx} - \langle p \rangle) \Psi(x) = \frac{i\hbar}{2a^2} (x - \langle x \rangle) \Psi(x)$$

Seien $\langle p \rangle \equiv \hbar k_0$, $\langle x \rangle \equiv x_0$

$$\Rightarrow \frac{d\Psi(x)}{dx} = \left[-\frac{1}{2a^2} (x - x_0) + ik_0 \right] \Psi(x)$$

$$= \left\{ \frac{d}{dx} \left[-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2} + ik_0 x + C \right] \right\} \Psi(x)$$

$$\Rightarrow \Psi(x) = D \cdot \exp \left\{ -\frac{(x-x_0)^2}{4a^2} + ik_0 x \right\},$$

$$|\Psi(x)|^2 = |D|^2 \exp \left\{ -\frac{(x-x_0)^2}{2a^2} \right\}$$

Genau das Beispiel auf Seite 17!

Fazit: Ein Teilchen $\hat{=}$ ein minimales gaußsches Wellenpaket, anstelle einer ebenen Welle wie wir am Anfang hatten.

Aber: eine ebene Welle $\hat{=}$ ein monochromatischer Strahl von Teilchen.

