

1.3 Wahrscheinlichkeitsinterpretation

[Münster 1.2.4, 1.3, 2.1]

Wir definieren

$$g(\vec{r}, t) \equiv |\Psi(\vec{r}, t)|^2 = \Psi^*(\vec{r}, t) \Psi(\vec{r}, t),$$

und betrachten

$$\frac{\partial g(\vec{r}, t)}{\partial t} = \frac{\partial \Psi^*(\vec{r}, t)}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) + \Psi^*(\vec{r}, t) \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t}.$$

Schrödinger-Gleichung:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V(\vec{r}) \right) \Psi(\vec{r}, t) \quad | \quad ()^*$$

$$-i\hbar \frac{\partial \Psi^*(\vec{r}, t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V(\vec{r}) \right) \Psi^*(\vec{r}, t)$$

Annahme: $V^*(\vec{r}) = V(\vec{r})$!

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\partial g(\vec{r}, t)}{\partial t} &= \frac{1}{i\hbar} \left\{ \left[\left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} - V(\vec{r}) \right) \Psi^*(\vec{r}, t) \right] \Psi(\vec{r}, t) + \Psi^*(\vec{r}, t) \left[\left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V(\vec{r}) \right) \Psi(\vec{r}, t) \right] \right\} \\ &= \frac{\hbar}{2im} \left\{ [\nabla \cdot \nabla \Psi^*(\vec{r}, t)] \Psi(\vec{r}, t) - \Psi^*(\vec{r}, t) [\nabla \cdot \nabla \Psi(\vec{r}, t)] \right\} \\ &\stackrel{!}{=} \frac{\hbar}{2im} \nabla \cdot \left\{ \underbrace{[\nabla \Psi^*(\vec{r}, t)] \Psi(\vec{r}, t)}_{\uparrow} - \underbrace{\Psi^*(\vec{r}, t) \nabla \Psi(\vec{r}, t)}_{\uparrow} \right\} \end{aligned}$$

Diese Operationen kürzen sich.

Definition:

$$\begin{aligned} \vec{j}(\vec{r}, t) &\equiv \frac{i\hbar}{2m} \left\{ [\nabla \Psi^*(\vec{r}, t)] \Psi(\vec{r}, t) - \Psi^*(\vec{r}, t) \nabla \Psi(\vec{r}, t) \right\} \\ &= \frac{i\hbar}{2m} \left\{ \underbrace{[\Psi^*(\vec{r}, t) \nabla \Psi(\vec{r}, t)]^*}_{\text{Re} - i\text{Im}} - \underbrace{\Psi^*(\vec{r}, t) \nabla \Psi(\vec{r}, t)}_{\text{Re} + i\text{Im}} \right\} \\ &= \frac{\hbar}{m} \text{Im} \left\{ \Psi^*(\vec{r}, t) \nabla \Psi(\vec{r}, t) \right\} \end{aligned}$$

Wir finden also eine Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial g(\vec{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) = 0, \quad \text{mit } g \in \mathbb{R}, \vec{j} \in \mathbb{R}^3.$$

Eine Kontinuitätsgleichung impliziert ein Erhaltungsgesetz:

$$N(t) \equiv \int_G d^3\vec{r} \, g(\vec{r}, t)$$

Am Ende, $G \rightarrow \mathbb{R}^3$; dies ist möglich, falls $\Psi(\vec{r}, t)$ "quadratisch integrierbar" ist, z.B. $|\Psi(\vec{r}, t)|^2 \rightarrow 0$ schneller als $\frac{1}{|\vec{r}|^3}$ für $|\vec{r}| \rightarrow \infty$.

Jetzt gilt:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \int_G d^3\vec{r} \frac{\partial g(\vec{r}, t)}{\partial t} = \int_G d^3\vec{r} [-\nabla \cdot \vec{j}(\vec{r}, t)]$$

$$\stackrel{\text{Gauss}}{=} - \int_{\partial G} d\vec{S} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t)$$



$$d\vec{S} = |\vec{r}|^2 d\Omega \vec{n}$$

Falls aber $|\Psi(\vec{r}, t)|^2 \rightarrow 0$ an der Oberfläche ∂G , dann muß auch $\vec{j}(\vec{r}, t)$ verschwindend sein.

$$\Rightarrow \text{für } G \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ gilt } \frac{dN(t)}{dt} = 0 !$$

$\Rightarrow N$ ist eine Erhaltungsgröße.

Was könnte die physikalische Interpretation von $N(t)$ sein?

- * Teilchenzahl? Als wir auf Seite 7 gesehen haben, gibt es aber Freiheit in der Normierung von $\Psi(\vec{r}, t)$. Wir entscheiden jetzt, daß wir ein einziges Teilchen betrachten; wir kriegen also eine Normierungsbedingung

$$N(t) = N(0) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{r} |\Psi(\vec{r}, t)|^2 \equiv 1.$$

- * $g(\vec{r}, t) \equiv$ die Wahrscheinlichkeitsdichte dafür, daß das Teilchen am Punkt $\vec{r}$ zu finden ist.

Diese Interpretation führt zur Definition physikalischer Größen, die in der Quantenmechanik als Erwartungswerte betrachtet werden.

* Wo findet man das Teilchen am wahrscheinlichsten?

$$\langle \vec{r} \rangle(t) \equiv \int d^3\vec{r} \, \vec{r} \, g(\vec{r}, t) = \int d^3\vec{r} \, \Psi^*(\vec{r}, t) \vec{r} \Psi(\vec{r}, t)$$

* Was ist die Varianz der Ortsmessungen?

$$\begin{aligned} |\Delta \vec{r}|^2 &\equiv \langle |\vec{r} - \langle \vec{r} \rangle|^2 \rangle \\ &= \int d^3\vec{r} \, \Psi^*(\vec{r}, t) |\vec{r} - \langle \vec{r} \rangle|^2 \Psi(\vec{r}, t) . \end{aligned}$$

Für den Impuls benutzen wir das Ergebnis von Aufgabe 1.4:

$$\int d^3\vec{r} \, \Psi^*(\vec{r}, t) \Psi(\vec{r}, t) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \tilde{\Psi}^*(\vec{k}, t) \tilde{\Psi}(\vec{k}, t) ,$$

wo

$$\Psi(\vec{r}, t) \equiv \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \tilde{\Psi}(\vec{k}, t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

$$\Rightarrow \frac{|\tilde{\Psi}(\vec{k}, t)|^2}{(2\pi)^3} \text{ ist die Wahrscheinlichkeitsdichte im Impulsraum}$$

$$\Rightarrow \langle \vec{p} \rangle(t) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \tilde{\Psi}^*(\vec{k}, t) \hbar \vec{k} \tilde{\Psi}(\vec{k}, t)$$

$$\stackrel{\text{Aufgabe 1.4}}{=} \int d^3\vec{r} \, \Psi^*(\vec{r}, t) (-i\hbar \nabla) \Psi(\vec{r}, t)$$

Und letztendlich die Varianz der Impulsmessungen:

$$\begin{aligned} |\Delta \vec{p}|^2 &= \langle |\vec{p} - \langle \vec{p} \rangle|^2 \rangle \\ &= \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \tilde{\Psi}^*(\vec{k}, t) |\hbar \vec{k} - \langle \vec{p} \rangle|^2 \tilde{\Psi}(\vec{k}, t) \\ &= \int d^3\vec{r} \, \Psi^*(\vec{r}, t) | -i\hbar \nabla - \langle \vec{p} \rangle |^2 \Psi(\vec{r}, t) . \end{aligned}$$

Notabene:

$$\Psi = \Psi_1 + i\Psi_2 \Rightarrow |\Psi|^2 \equiv \Psi_1^2 + \Psi_2^2$$

$$\vec{r} = (r_1, r_2, r_3) \Rightarrow |\vec{r}|^2 \equiv r_1^2 + r_2^2 + r_3^2$$

Bemerkungen zur Wahrscheinlichkeitsinterpretation:

$$(i) \quad \vec{j}(\vec{r}, t) = \frac{\hbar}{m} \operatorname{Im} \{ \psi^*(\vec{r}, t) \nabla \psi(\vec{r}, t) \}$$

$\Rightarrow$ funktioniert nur falls $\psi \in \mathbb{C}$!

(ii) Seite 7: Wellenfunktionen können linear superponiert werden:

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi_1(\vec{r}, t) + \psi_2(\vec{r}, t)$$

$$\Rightarrow |\psi(\vec{r}, t)|^2 = |\psi_1(\vec{r}, t)|^2 + |\psi_2(\vec{r}, t)|^2 + \underbrace{\psi_1^*(\vec{r}, t) \psi_2(\vec{r}, t) + \psi_2^*(\vec{r}, t) \psi_1(\vec{r}, t)}_{\text{quantenmechanische Interferenzterme}}$$

eine klassische Summe
der Einzelwahrscheinlichkeiten

quantenmechanische
Interferenzterme

(iii) philosophische Probleme?

* Kann man mit einer Theorie zufrieden sein,
die keine "genaue" Information über ein Teilchen
liefert, nur Wahrscheinlichkeiten?

* Dennoch ist die Theorie "kausal":
die Zeitentwicklung der Wellenfunktion wird
eindeutig von der Schrödinger-Gleichung bestimmt!

$\Rightarrow$ man sollte einfach an keinen klassischen Vorurteilen
festhalten, wenn es um sehr mikroskopische
Phänomene geht. Mehr darüber später.