„Es lebe die Unverfrorenheit!“
Albert Einstein und die Begründung der Quantentheorie*

Domenico Giulini
Universität Freiburg
Physikalisches Institut
Hermann-Herder-Straße 3
79104 Freiburg

Zusammenfassung

Am 14. Dezember des Jahres 1900 berichtete Max Planck der Deutschen Physikalischen Gesellschaft über seine physikalische Interpretation einer harmlos aussehenden, von ihn selbst zuvor aufgestellten Formel, die das spektrale Verhalten der sogenannten Wärmestrahlung beschreibt. Maßgeblich durch das Eingreifen Albert Einsteins entwickelte sich daraus im folgenden Vierteljahrhundert eine fundamentale Krise der Physik, die dann in einer wissenschaftlichen Revolution größten Ausmaßes mündete: der Quantentheorie.

Die Quantentheorie entwickelte sich von Anfang an diametral gegen die Intentionen ihrer Schöpfer. Für Planck bedeutete sie – trotz größter äußerer Anerkennungen – das vollständige Scheitern eines langjährigen Forschungsprogramms, für Einstein letztlich eine Absage an seine wissenschaftlichen Grundüberzeugungen. Wir schildern die Hintergründe dieser seltsamen Entwicklung und beleuchten damit die begriffliche Seite physikalischer (und allgemein naturwissenschaftlicher) Forschung, die gemeinhin stark unterschätzt wird.

Um die Rolle zu verstehen, die Albert Einstein bei der Entwicklung der Quantentheorie gespielt hat, müssen wir uns zunächst die vorangegangenen Leistungen Plancks vergegenwärtigen, die ihn zur Aufstellung seiner berühmten Strahlungsformel geführt haben. Mit dieser gelang ihm die vollständige *quantitative* Aufklärung des Phänomens der *Wärmestrahlung*, die ihm den Nobelpreis des Jahres 1918 einbrachte: „als Anerkennung des Verdienstes, das er sich durch seine Quantentheorie um die Entwicklung der Physik erworben hat“. Zu diesem Zeitpunkt lag die eigentliche Tat schon mehr als 17 Jahre zurück. Genauer ist sie auf den 14. Dezember des Jahres 1900 zu datieren. Davon wird weiter unten die Rede sein.

Etwas weniger bekannt ist die Tatsache, daß diese wissenschaftliche Großtat Plancks gleichzeitig auch die restlose Zerschlagung seines langjährigen, akribisch vorbereiteten und meisterhaft durchgeführten Forschungsprogramms bedeutete, das in einer tief anti-atomistischen, an absoluten Gesetzmäßigkeiten sich orientierenden

*Erschienen in: Herbert Hunziker (Hrsg.) *Der jugendliche Einstein und Aarau* (Birkhäuser Verlag, Basel, 2005)

Naturauffassung wurzelt. In der Verfolgung dieser Ideale legt Planck den Grundstein zur Quantentheorie, die dem konsequenten Atomismus zum endgültigen Durchbruch verhilft und dem Element des Zufalls eine fundamentale Bedeutung innerhalb des Gefüges physikalischer Gesetzmäßigkeiten zuweist. Hauptmotor dieser Entwicklung, die den Planckschen Vorstellungen diametral entgegenlief, war Albert Einstein. Hartnäckig und mitunter unverfroren[1] bestand er auf der restlosen Klärung der begrifflichen Grundlagen und Konsequenzen der Planckschen Theorie. Mit seiner Lichtquantenhypothese erklärte er nicht nur den photoelektrischen Effekt, sondern legte den eigentlich revolutionären Kern dieser Theorie frei und provozierte so maßgeblich eine tiefe Krise, die 20 Jahre später in der Formulierung der Quantenmechanik mündete. Etwas übertreibend, aber im Kern doch zutreffend, kann man sagen, daß Einstein der einzige war, der die Plancksche Theorie wirklich ernst nahm – so ernst, daß die Konsequenzen sich schließlich auch gegen seine Grundüberzeugungen richteten.

1 Plancks Programm

Planck hatte sich schon in jungen Jahren ein ehrgeiziges Forschungsprogramm zurechtgelegt. Er wollte den sogenannten 2. Hauptsatz[2] der Thermodynamik mit Hilfe der Theorie elektromagnetischer Vorgänge streng begründen. Dies geschah aus einer Opposition zu den Vertretern des Atomismus, die in den Gesetzen der Thermodynamik lediglich statistische Gesetzmäßigkeiten einer sonst regellosen Bewegung sehr vieler Moleküle sehen wollten, während Planck fest an eine strenge Gesetzlichkeit ohne statistische Ausnahmen glaubte. In einer Jugendarbeit aus dem Jahre 1884 schreibt der 24-jährige selbstbewußt ([12], Band I, Dokument Nr. 4, pp. 162-163):

> „Der zweite Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie consequent durchgeführt, ist unverträglich mit der Annahme endlicher Atome. Es ist daher vorauszusehen, daß es im Laufe der weiteren Entwicklung der Theorie zu einem Kampfe zwischen diesen beiden Theorien kommen wird, der einer von ihnen das Leben kostet.“

Zwei Zeilen weiter läßt er wenig Zweifel darüber, welche der Theorien seiner Meinung und Hoffnung nach das Leben wird lassen müssen:

> „... indessen scheinen mir augenblicklich verschiedenartige Anzeichen darauf hinzudeuten, daß man trotz der bisherigen Erfolge der atomisti-

[1] Das Zitat des Titels entstammt einem Brief ([6], Band 1, Dokument 127) Einsteins vom 12. Dezember 1901 an seine damalige Freundin und spätere Frau Mileva Maric, in dem er seine Courage in einer privaten Angelegenheit zu einer Art Lebensmotto erhob und kommentierte: „Es lebe die Unverfrorenheit! Sie ist mein Schutzengel in dieser Welt.“

[2] Der 1. Hauptsatz ist der Satz über die Erhaltung der Energie. Der 2. Hauptsatz betrifft nicht die Energie, sondern eine andere Zustandsgröße, genannt *Entropie*. Er besagt in der älteren, Planck näherliegenden Formulierung, daß die Entropie zeitlich nicht abnimmt. In der modernen, von Planck zunächst bekämpften statistischen Interpretation der Entropie, ist diese ein Maß für die „Unordnung“. Genauer gesagt ist die Entropie ein (logarithmisches) Maß für die Anzahl der Mikrozustände, die einen makroskopisch definierten Zustand realisieren (siehe dazu Anhang A). Der 2. Hauptsatz besagt in dieser Interpretation, daß die Entropie *im Zeitmittel* nicht abnimmt (statistische Schwankungen, in denen die Entropie vorübergehend kurz abnimmt, sind also erlaubt). Der 2. Hauptsatz regelt die Irreversibilität gewisser Prozesse. Das sind dann solche, bei denen die Entropie zunimmt.

schen Theorie sich schließlich doch einmal zu einer Aufgabe derselben und zur Annahme einer continuierlichen Materie wird entschließen müssen."

Zu dieser Zeit war der junge Planck ein erklärter Anti-Atomist. Sein Plan war, zu versuchen, die thermodynamischen Gesetze nicht über eine Mechanik elementarer Konstituenten (Atome, Moleküle) zu begründen, sondern mit Hilfe der Gesetze der Elektrodynamik, die mit rein kontinuierlichen, im Raum verteilten Größen operiert. In seiner Antrittsrede anläßlich seiner Aufnahme in die Preußische Akademie der Wissenschaften im Jahre 1894 erklärte er ([12], Band III, Dokument Nr. 122, p. 3):

> „Es hat sich neuerdings in der physikalischen Forschung auch das Bestreben Bahn gebrochen, den Zusammenhang der Erscheinungen überhaupt gar nicht in der Mechanik zu suchen [..]. Ebenso steht zu hoffen, daß wir auch über diejenigen elektrodynamischen Prozesse, welche direkt durch die Temperatur bedingt sind, wie sie sich namentlich in der Wärmestrahlung äußern, nähere Aufklärung erfahren können, ohne erst den mühsamen Umweg durch die mechanische Deutung der Elektrizität nehmen zu müssen."

Planck glaubte also an die Möglichkeit, die Gesetze der Thermodynamik, namentlich den 2. Hauptsatz, als strenge Folge bekannter elektromagnetischer Gesetze zu verstehen.[3] Dieser sollte aus allgemeinsten Prinzipien ableitbar sein, entsprechend seiner wissenschaftlichen Disposition, die er in seinem späten, persönlich gehaltenen Artikel „Zur Geschichte der Auffindung des physikalischen Wirkungsquantums" aus dem Jahre 1943 so charakterisierte ([12], Band III, Dokument 141, p. 255):

> „Was mich in der Physik von jeher vor allem interessierte, waren die großen allgemeinen Gesetze, die für sämtliche Naturvorgänge Bedeutung besitzen, unabhängig von den Eigenschaften der an den Vorgängen beteiligten Körper."

[3] Aus heutiger Sicht ist diese Hoffnung schwer verständlich, da die Gesetze der Elektrodynamik genauso wie die Gesetze der Mechanik *invariant unter Bewegungsumkehr* sind. Das bedeutet, daß mit jeder den Gesetzen genügenden Bewegung die entsprechend zeitlich rückläufige Bewegung wieder eine mögliche Bewegung im Sinne der Gesetze ist. Aus dieser mathematischen Tatsache folgt zwingend die Unmöglichkeit eines Beweises über die ausnahmslose zeitliche Zunahme einer Zustandsgröße, wie etwa der Entropie. Nur unter *zusätzlichen* Annahmen, die immer Einschränkungen an die Anfangsbedingungen beinhalten, können solche Beweise funktionieren. Auch Planck wird später bei seiner 'Ableitung' der Wienschen Strahlungsformel eine solche Annahme in etwas versteckter Form machen (durch seine „Hypothese der natürlichen Strahlung"), was für die hier zu besprechenden Entwicklungen aber nicht weiter relevant ist. Noch schwerer verständlich wird das Festhalten Plancks an dieser Hoffnung durch den Hinweis, daß Planck das eben skizzierte Argument sicherlich kannte, nämlich durch den Mathematiker Ernst Zermelo, der in den Jahren 1894-1897 sein Assistent war und darüber einiges publiziert hat.

2 Frühe Strahlungstheorie

Man denke sich einen Hohlraum, der vollständig durch Wände umschlossen ist, etwa das Innere eines Ofens. Bringt man die Wände auf eine konstante Temperatur[4] T, so wird sich nach einiger Zeit im Hohlraum eine bestimmte Konfiguration elektromagnetischer Strahlung einstellen, die sogenannte Wärmestrahlung. Diese wird aus elektromagnetischen Wellen aller Frequenzen mit unterschiedlichen Intensitäten bestehen. Zwischen Strahlung und der die Wände bildenden Materie wird nach einiger Zeit ein thermodynamisches Gleichgewicht bestehen. Einzig wesentliche Voraussetzung für die Existenz eines stabilen Gleichgewichtszustandes ist die Annahme, daß die Materie (oder zumindest Anteile davon) in *allen* Frequenzbereichen mit der Strahlung wechselwirkt, also Strahlung aller Frequenzen emittieren und absorbieren kann. Mit Hilfe dieser Annahme folgerte Gustav Kirchhoff bereits 1859 die Existenz einer *universellen* Funktion $\rho(\nu, T)$ für die spektrale Energieverteilung der Strahlung. Diese gibt an, wieviel Energie in Form von elektromagnetischen Wellen der Frequenz ν (genauer: in einem kleinen Frequenzintervall $[\nu, \nu + d\nu]$ um den Wert ν) in einem Einheitsvolumen (z.B. Kubikzentimeter) des Hohlraumes enthalten ist, wenn die Wände auf die Temperatur T aufgeheizt wurden. Daß diese Funktion „universell" ist, bedeutet, daß sie *nicht* von der genaueren Beschaffenheit der Wände abhängt, also nicht von ihrer Form oder ihrem Material. Egal, ob die Wände aus Kupfer, Uran, Keramik oder sonstwas bestehen, immer wird sich bei vorgegebener Temperatur ein und dieselbe spektrale Energieverteilung von Wärmestrahlung einstellen. Darin liegt die nichttriviale Einsicht Kirchhoffs. Daraus entsteht nun die theoretische Aufgabe, diese universelle Funktion aus den bekannten Gesetzen der Thermodynamik und Elektrodynamik zu bestimmen. Man beachte, daß diese Aufgabe nur wegen der Universalität lösbar erscheint, da dadurch die Kenntnis komplizierter Materialeigenschaften sowie deren (zum damaligen Zeitpunkt größtenteils unbekannter) Einflüsse auf die Wechselwirkung zwischen Material und Strahlung nicht vorausgesetzt werden müssen.

Durch weitere, raffiniertere thermodynamische Überlegungen konnte Wilhelm Wien 1893 zeigen, daß die Funktion $\rho(\nu, T)$ aus dem Produkt der dritten Potenz der Frequenz ν und einer Funktion f bestehen muß, die jetzt nur noch von *einer* Variablen abhängt, nämlich dem Quotienten der Frequenz und der Temperatur.[5] Es muß also gelten:

$$\rho(\nu, T) = \nu^3 f(\nu/T)\,. \tag{1}$$

Der Fortschritt dieser Einsicht Wiens besteht also in der Reduktion des Problems auf die Bestimmung einer Funktion mit nur *einer* anstatt zwei unabhängigen Variablen. Bestimmt man f, so ist damit nach (1) auch $\rho(\nu, T)$ bekannt. Außerdem folgen aus (1) auch ohne Kenntnis der Funktion f bereits erste, experimentell prüfbare Konsequenzen, die glänzend bestätigt wurden. So ergibt sich einerseits das sogenannte Wiensche Verschiebungsgesetz, welches besagt, daß die Frequenz, bei der die spektrale

[4] Aus bestimmten Gründen benutzen Physiker lieber die sogenannte absolute Temperaturskala, auf der die Temperatur nicht in Grad Celsius, sondern in Grad Kelvin angegeben wird. Beide Skalen unterscheiden sich um den konstanten Betrag von $273{,}15$, d.h. X Grad Celsius entsprechen $X + 273{,}15$ Grad Kelvin. Null Grad Kelvin, also $-273{,}15$ Grad Celsius, bildet eine absolute untere Grenze für alle erreichbaren Temperaturen, die unter keinen Umständen unterschritten werden kann.

[5] Zwar treten im Argument der Funktion sowohl die Frequenz als auch die Temperatur T auf, aber nur als Quotient ν/T. Dieser Quotient ist die *eine* Variable, von der f alleine abhängt.

Energieverteilung ihr Maximum hat, proportional mit der Temperatur wächst. Ebenso ergibt sich, daß die gesamte, über alle Frequenzen summierte Energieabstrahlung mit der vierten Potenz der Temperatur anwächst. Dies bezeichnet man als das Stefan-Boltzmannsche Gesetz.

Wie gesagt, bestand die eigentliche Aufgabe nun in der Bestimmung der einen Funktion f. Durch weitere Anwendung fundamentaler Prinzipien sollte dies schließlich ohne allzu großen Aufwand gelingen – so dachten die Physiker zwischen 1893 und 1900. Doch erwies sich diese Aufgabe überraschenderweise als fast unlösbar. Rückschauend aus dem Jahre 1913 charakterisierte Einstein die Situation so ([6], Band 4, Dokument Nr. 23, p. 562):

> „Es wäre erhebend, wenn wir die Gehirnsubstanz auf eine Waage legen könnten, die von den theoretischen Physikern auf dem Altar dieser universellen Funktion f hingeopfert wurde; und es ist diesen grausamen Opfers kein Ende abzusehen! Noch mehr: auch die klassische Mechanik fiel ihr zum Opfer, und es ist nicht abzusehen, ob Maxwells Gleichungen der Elektrodynamik die Krisis überdauern werden, welche diese Funktion f mit sich gebracht hat.“

Doch zurück zum Geschehen. Aus Überlegungen, die man eher als „educated guessing“ bezeichnen kann, schlägt Wien eine einfache Exponentialfunktion für f vor, die dann im Verbund mit (1) zum sogenannten *Wienschen Strahlungsgesetz* führt (exp bezeichnet im folgenden die Exponentialfunktion):

$$\rho(\nu, T) = a\nu^3 \exp\left[-\frac{b\nu}{T}\right] , \tag{2}$$

wobei a und b Konstanten sind, die es noch zu bestimmen gilt.

Zahlreiche Experimente schienen ausnahmslos diese Form der spektralen Energieverteilung zu bestätigen (dies blieb der Fall bis etwa Mitte 1900). Überzeugt von seiner Richtigkeit stellt sich daher Planck die Aufgabe, das Wiensche Strahlungsgesetz aus ersten Prinzipien theoretisch abzuleiten. Als „Prinzipienlieferant“ akzeptiert er vornehmlich die Elektrodynamik und die Thermodynamik und hier an erster Stelle den 2. Hauptsatz über die Zunahme der Entropie. Nach langen Mühen gelingt ihm schließlich im Jahre 1899 eine Ableitung von (2). Er resümiert stolz ([12], Band I, Dokument Nr. 34, p. 597):

> „Ich glaube hieraus schließen zu müssen, daß die gegebene Definition der Strahlungsentropie und damit auch das Wiensche Energieverteilungsgesetz eine notwendige Folge der Anwendung des Principes der Vermehrung der Entropie auf die elektromagnetische Strahlungstheorie ist und daß daher die Grenzen der Gültigkeit dieses Gesetzes, falls solche überhaupt existieren, mit denen des zweiten Hauptsatzes der Wärmetheorie zusammenfallen.“

Ironischerweise sind es Experimentalphysiker (Lummer und Pringsheim), die den Theoretiker Planck in einer Veröffentlichung des gleichen Jahres, die der experimentellen Überprüfung des Wienschen Strahlungsgesetzes gewidmet ist, höflich darauf hinweisen, daß hier ein logisch unzulässiger Umkehrschluß vorliegt ([8], p. 225):

> „Herr Planck spricht es aus, daß dieses [d.h. (2)] Gesetz eine nothwendige Folge der Anwendung des Principes der Vermehrung der Entropie auf die elektromagnetische Strahlung ist, und daß daher die Grenzen seiner Gültigkeit, falls solche überhaupt existieren, mit denen des zweiten Hauptsatzes der Wärmetheorie zusammenfallen. Soviel uns scheint, wäre die Planck'sche Theorie erst zwingend, wenn wirklich nachgewiesen werden kann, daß *jede* von obiger Gleichung abweichende Form zu einem Ausdruck der Entropie führt, der dem Entropiegesetz widerspricht.“

Planck hatte nämlich keineswegs gezeigt, daß das Wiensche Gesetz eine logische Folge des 2. Hauptsatzes der Thermodynamik ist, sondern nur, daß es dem 2. Hauptsatz nicht widerspricht. Trotz dieses logischen Lapsus' ist die von Planck verwendete Methode bemerkenswert. Da sie charakteristisch für das Vorgehen eines theoretischen Physikers ist, soll sie hier etwas ausführlicher beschrieben werden.

3 Das nähere Vorgehen Plancks

Planck stützt sich auf Kirchhoff, der ja einwandfrei argumentiert hatte, daß im thermodynamischen Gleichgewicht die spektrale Energieverteilung $\rho(\nu, T)$ eine *universelle* Funktion ist, also von der Form des Hohlraums und der Beschaffenheit der Wände gänzlich unabhängig ist. Die geniale, aber in den meisten Darstellungen wenig hervorgehobene Idee Plancks ist nun folgende (vorgetragen in [12], Band I, Dokument Nr. 34, pp. 592-593): wegen der Unabhängigkeit der spektralen Energieverteilung von der physikalischen Beschaffenheit der Wand darf man sich *zum Zwecke der theoretischen Bestimmung* der Funktion $\rho(\nu, T)$ die Wand auch aus einem hypothetischen, der theoretischen Beschreibung leicht zugänglichen Material ersetzt denken. Dabei ist es ganz unwesentlich, ob dies hypothetische Medium in der realen Welt tatsächlich existiert, sondern wesentlich ist nur, daß es den bekannten Gesetzen der Physik genügt, also in diesem Sinne existieren *könnte*. Die Kirchhoffsche Überlegung versichert dann, daß die spektrale Energieverteilung, die sich (theoretisch) im Hohlraum des hypothetischen Mediums einstellt, dieselbe ist wie die im Hohlraum eines tatsächlich existierenden Materials.

Planck wählt als hypothetisches Medium eine Art Gitter von kleinen elektrischen Ladungen, die mit einer kleinen Feder elastisch an eine Ruhelage befestigt sind. Planck nennt diese Gebilde „Resonatoren“, denn sie sollen fähig sein, kleine Schwingungen mit einer festen Frequenz ν (der sogenannten „Eigenfrequenz“) auszuführen, wenn sie von einer elektromagnetischen Welle dieser Frequenz getroffen werden. Dieses sehr vereinfachte Modell einer „Wand“ ist nun durch die damals bekannten Gesetze der Elektrodynamik und Mechanik vollständig zu erfassen – ganz im Gegensatz zu einer realistischen Wand, deren mikroskopischer Aufbau und vor allem deren komplizierte Wechselwirkung mit auftreffenden Lichtstrahlen zum damaligen Zeitpunkt noch ganz unverstanden waren.

Aus der selbstverständlichen Bedingung, daß im thermodynamischen Gleichgewicht jeder dieser elementaren Resonatoren genauso viel elektromagnetische Energie emittiert wie absorbiert, leitete Planck die folgende Bedingung zwischen spektraler Energiedichte $\rho(\nu, T)$ und mittlerer Energie $\overline{E}(\nu, T)$ eines einzelnen Resonators der

Schwingungsfrequenz ν bei der Temperatur T ab:

$$\rho(\nu,T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\bar{E}(\nu,T)\,. \tag{3}$$

Es muß hier nochmals betont werden, daß diese Gleichung eine unzweideutige Folge der Gesetze der klassischen Physik (Mechanik und Elektrodynamik) ist. Hätte Planck die damals bereits von seinem wissenschaftlichen Widersacher Ludwig Boltzmann (1844-1906) ausgearbeitete statistische Mechanik akzeptiert, so hätte er sofort einen Ausdruck für $\bar{E}(\nu,T)$ angeben können. Aus dem sogenannten Äquipartitionsgesetz der statistischen Mechanik folgt nämlich, daß

$$\bar{E}(\nu,T) = \frac{R}{N_A}T\,, \tag{4}$$

wobei R die sogenannte universelle Gaskonstante ist (durch Messungen gut bekannt) und N_A die Avogadro-Zahl, also die Zahl der in einem Mol Gas enthaltenen Moleküle. Er wäre damit zum sogenannten Rayleigh-Jeans-Gesetz gelangt:

$$\rho(\nu,T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\frac{R}{N_A}T\,, \tag{5}$$

das – obwohl eine ebenso unzweideutige Folge der klassischen Physik – ganz unsinnige Aussagen macht. Zum Beispiel besagt es, daß bei fester Temperatur T die in elektromagnetischen Wellen der Frequenz ν abgestrahlte Energie quadratisch in ν wächst, insgesamt also unendlich viel Energie abgestrahlt wird, wenn man über alle Frequenzen summiert. Auch hinsichtlich der Abhängigkeit von T geht der Ausdruck (5) völlig fehl. Das direkt proportionale Ansteigen der Strahlungsenergie mit der Temperatur hätte zum Beispiel zur Folge, daß bei jeder Frequenz die Energieabstrahlung bei Raumtemperatur – T etwa gleich 290 Grad Kelvin – immerhin noch ein Sechstel der Abstrahlung bei der Temperatur von 1700 Grad Kelvin wäre. Letztere entspricht etwa der Temperatur schmelzenden (d.h. weißglühenden) Stahls. Dies ist offensichtlich eine groteske Überschätzung der Abstrahlung bei Raumtemperatur. Doch Planck erwähnt diese katastrophale Folge mit keinem Wort. Erst Einstein wird in seiner Nobelpreisarbeit von 1905 darauf beharren, daß die klassische Physik notwendig zum inakzeptablen Rayleigh-Jeans-Gesetz führt und deswegen fundamental nicht richtig sein kann.

Planck geht völlig andere, recht seltsame Wege, um die jetzt noch fehlende Funktion $\rho(\nu,T)$ zu bestimmen. In der Annahme der Richtigkeit des Wienschen Gesetzes kennt er das Ziel und weiß daher, welchen Ausdruck für $\rho(\nu,T)$ er „herbeiargumentieren" muß, um (2) aus (3) folgen zu lassen. An dieser Stelle bringt er nun den 2. Hauptsatz der Thermodynamik ins Spiel: Statt die Energie $\bar{E}(\nu,T)$ des einzelnen Resonators zu bestimmen – wofür er keine direkte Methode hat –, geht er den Umweg über die Entropie $S(\nu,T)$, denn diese sollte sich aus den Forderungen des 2. Hauptsatzes ergeben. Aus einer allgemein gültigen thermodynamischen Relation, nach der die Ableitung der Entropie nach der Energie die inverse Temperatur ist (siehe Gleichung (15) im Anhang A), würde sich dann auch die Funktion $\bar{E}(\nu,T)$ ergeben. Planck gibt dann tatsächlich einen Entropieausdruck an, von dem er zeigen kann, daß er allen Anforderungen des 2. Hauptsatzes genügt und der direkt zum Wienschen Gesetz führt. Entgegen seiner obigen Aussagen zeigt er aber nicht, daß dieser Ausdruck eindeutig ist. Es könnte also durchaus andere, ebenfalls mit dem 2. Hauptsatz formal verträgliche Strahlungsgesetze geben (was sich später auch als tatsächlich gegeben herausstellt).

4 Der Widerspruch

Experimentelle Messungen an der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt in Berlin im Jahre 1899 ergaben systematische Abweichungen vom Wienschen Strahlungsgesetz im Bereich niederer Frequenzen (d.h. großer Wellenlängen) [8, 15]. Die gemessenen Energien lagen bei kleinen Frequenzen systematisch oberhalb der Wienschen Kurve. Dazu mußten erst neue Meßmethoden entwickelt werden, um den niederfrequenten Anteil des Spektrums möglichst sauber zu isolieren. Diese„Divergenzen von erheblicher Natur“ (Planck) wurden in der Sitzung der Deutschen Physikalischen Gesellschaft am 19. Oktober mitgeteilt. Es ist bekannt, daß Planck bereits am 7. Oktober – einem Sonntag – von Heinrich Rubens, einem der Experimentatoren, aufgesucht und von den neuen experimentellen Befunden unterrichtet wurde. Noch am gleichen Abend fand Planck durch geschicktes Probieren (im Anhang E erläutert) eine neue, von der Wienschen leicht abweichende Strahlungsformel, die die neuen Resultate befriedigend wiederzugeben vermochte. Diese teilte er dann ebenfalls am 19. Oktober im Anschluß an das Referat des Experimentalphysikers Kurlbaum der Deutschen Physikalischen Gesellschaft mit. Damit war die Plancksche Strahlungsformel geboren:

$$\rho(\nu, T) = \frac{a\nu^3}{\exp\big(b\nu/T\big) - 1} \,. \qquad (6)$$

Sie unterscheidet sich von der Wienschen Formel (2) lediglich durch die -1 im Nenner, so daß für hohe Frequenzen und/oder kleine Temperaturen beide Ausdrücke approximativ gleich sind. Für kleine Verhältnisse ν/T verläuft die Plancksche Kurve aber systematisch *oberhalb* der Wienschen, sagt also bei gegebener Temperatur eine merklich höhere Energiedichte im Bereich kleiner Frequenzen (d.h. größerer Wellenlängen) voraus. Dies ist in Abbildung 1 dargestellt.

Experimentell wurden diese Abweichungen von der Wienschen Formel bei großen Wellenlängen zuerst von Otto Lummer und Ernst Pringsheim [8] gemessen und sofort darauf von Heinrich Rubens und Ferdinand Kurlbaum [15] noch eindrücklicher bestätigt. Beide Gruppen arbeiteten zu dieser Zeit an der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt in Berlin-Charlottenburg. Die Meßkurve aus der Originalveröffentlichung von Lummer und Pringsheim ist als Abbildung 3 im Anhang C wiedergegeben.

Zum Schluß dieses Abschnitts erwähnen wir noch, daß in moderner Schreibweise die Konstanten a und b in (6) durch andere Konstanten ausgedrückt werden, nämlich die Lichtgeschwindigkeit c, die Boltzmann-Konstante $k = R/N_A$ und das Plancksche Wirkungsquantum h:

$$a = \frac{8\pi h}{c^3} \,, \qquad b = \frac{h}{k} \,. \qquad (7)$$

Dieser Zusammenhang wird allerdings erst durch die theoretische Begründung der Planckschen Strahlungsformel verständlich werden.

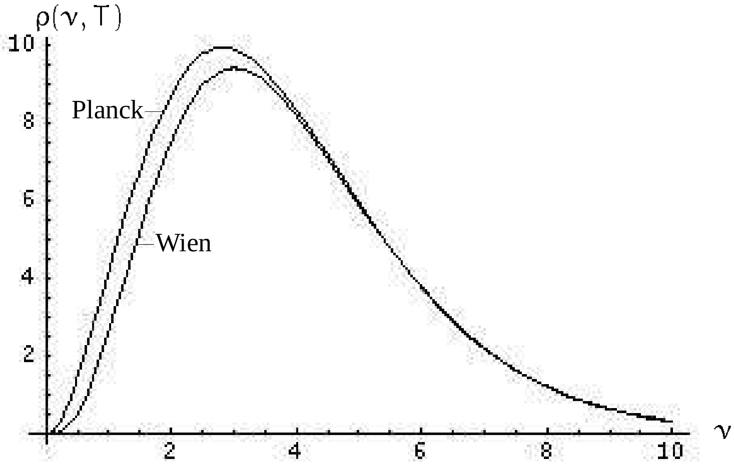

Abbildung 1: Die spektrale Energieverteilung bei fester Temperatur als Funktion der Frequenz nach der Planckschen und Wienschen Strahlungsformel. Der bequemeren Darstellbarkeit halber sind die Einheiten so gewählt, daß $a = 7$ und $b/T = 1$. Für kleine Frequenzen (links vom Maximum) verläuft die Plancksche Kurve erkennbar oberhalb der Wienschen, während sich für große Frequenzen (rechts vom Maximum) die Kurven rasch annähern und schließlich praktisch zur Deckung kommen.

5 Intermezzo: Einsteins Bestimmung der Avogadro-Zahl

Zu Beginn seiner berühmten Arbeit über Lichtquanten aus dem Jahre 1905 ([6], Band 2, Dokument 14) macht Einstein eine wichtige Bemerkung, die man etwa so zusammenfassen kann: Fordert man, daß das Gesetz (5), was eine notwendige Folge der klassischen Physik ist, als Grenzgesetz in der als phänomenologisch gültig angesehenen Planckschen Formel enthalten ist, so ergibt sich eine von jeder *theoretischen Begründung* der Planckschen Formel *unabhängige* Methode zur Bestimmung der Avogadro-Zahl N_A. Entwickelt man die Exponentialfunktion im Nenner von (6) bis zu linearer Ordnung in $b\nu/T$, so ergibt sich das Gesetz (5) genau dann, wenn die Avogadro-Zahl N_A mit den Konstanten a, b des Planckschen Gesetzes in folgender Beziehung steht:

$$N_A = \frac{b}{a} \cdot \frac{8\pi R}{c^3}\,. \tag{8}$$

Da R und c gut bekannt sind, liefert jede Bestimmung von a und b durch Strahlungsmessungen auch einen Wert für N_A. Einstein erhielt so den Wert $N_A = 6{,}17 \cdot 10^{23}$. Zu dieser Zeit war dies der mit Abstand genaueste Wert der Avogadro-Zahl (vgl. Kapitel 5 in [11]).

Aber man konnte noch weiter schließen: Aus der Kenntnis der Faradaykonstante (elektrische Ladung eines Mols einwertiger Ionen), die aus Elektrolysedaten gut bekannt war, erhält man nach Division durch N_A den Wert der elektrischen Elementarladung e. Die Elementarladung (Betrag der Ladung eines Elektrons) ließ sich also aus Strahlungsmessungen mit Hilfe der Planckschen Formel gewinnen, wobei sich ein weit besserer Wert als jemals zuvor ergab. Dies geht eindrücklich aus folgendem Vergleich der damals diskutierten Werte mit dem heutigen Wert der „Particle Data Group" (PDG) hervor (in Einheiten von $10^{-10}\,\mathrm{esu}$, wo $1\,\mathrm{esu} = 0{,}1\ \mathrm{Ampere} \times \mathrm{meter}/c$ die

Ladungseinheit „electrostatic units“ bezeichnet):

Richarz (1894):	1.29
J.J. Thomson (1898):	6.50
Planck/Einstein (1901):	4.69
PDG (2000):	4.803 204 20(19)

Tatsächlich hatte bereits Planck 1901 die hier angegebenen Werte für die Avogadro-Zahl und die Elementarladung mit Hilfe seiner Formel und den Ergebnissen von Strahlungsmessungen ausgerechnet ([12], Band I, Dokument Nr. 44, pp. 717-727). Aber erst Einstein sah, daß dieses Vorgehen weitgehend unabhängig von Plancks theoretischer Begründung seiner Strahlungsformel gerechtfertigt werden kann, wenn man nur die Forderung nach dem klassischen Limes stellt.[6] Die Ironie dieser Episode ist, daß diese Präzisionsbestimmung einer fundamental atomistischen Größe ausgerechnet durch den damaligen Anti-Atomisten Planck ermöglicht wurde.

6 Der „Akt der Verzweiflung“

Wie sollte nun Planck nach all seinen Mühen, das Wiensche Gesetz theoretisch zu begründen, eine Ableitung des neuen Gesetzes (6) herzaubern? Hatte er nicht noch gerade argumentiert, daß der 2. Hauptsatz notwendig zum Wienschen Gesetz führe? Immerhin blieb er seiner „klassischen“ Formel (3) treu und seiner Strategie, die mittlere Resonatorenergie $\bar{E}(\nu, T)$ aus der Entropie zu bestimmen. Er erkannte jetzt endgültig, daß der Ausdruck für letztere, den er vorher nach vielen Mühen erhalten hatte und der ihm scheinbar unausweichlich zum Wienschen Gesetz führte, nicht der formal einzig mögliche sein konnte. So sehr sich Planck aber auch abmühte, eine Begründung des erforderlichen neuen Ausdrucks zu liefern, es wollte ihm einfach nicht gelingen. In seinem Ringen um das Auffinden allgemeiner Methoden, die es erlauben würden, die Entropie eines Resonators im Strahlungsfeld zu berechnen, verfiel er schließlich auf den verzweifelten Ausweg, ausgerechnet die von ihm bisher vehement bekämpfte Methode der statistischen Interpretation der Entropie seines Widersachers Boltzmann zu verwenden. Danach ist die Entropie eine rein kombinatorische Größe, die bekannt ist, wenn man die Anzahl der Möglichkeiten kennt, eine feste Energiemenge auf eine feste Anzahl von Resonatoren zu verteilen. Diese Anzahl wäre unendlich – und damit die Entropie unbestimmt –, wenn jeder Resonator Energie in kontinuierlichen Mengen aufnehmen könnte. Damit die Entropie endlich herauskommt, muß Planck annehmen, daß die Gesamtenergie nur in ganzzahligen Vielfachen einer bestimmten Grundeinheit über die Resonatoren verteilt werden kann. Aus dem allgemeinen Gesetz (1) ergibt sich, daß diese Grundeinheit proportional zur Eigenfrequenz ν des Resonators sein muß. Diese Proportionalitätskonstante nennt man heute das Plancksche Wirkungsquantum h. Für die Energie-Grundeinheit ε gilt also die Plancksche Formel

$$\varepsilon = h\nu\,. \tag{9}$$

Für Planck war dies eine rein formale Annahme von höchstens heuristischer Bedeutung, die er hoffte, später durch ein physikalisches Argument eliminieren zu können.

[6] Dies ist meines Wissens die erste Formulierung eines „Korrespondenzprinzips“, gemäß dem die klassische Physik in einem geeigneten „klassischen Limes“ aus der Quantentheorie folgen soll. Erst später hat Niels Bohr diese Forderung zu einem allgemeinen Prinzip erhoben.

Immerhin führte sie ihn zu einer Ableitung, die er der Deutschen Physikalischen Gesellschaft in der Sitzung am 14. Dezember des Jahres 1900 mitteilte. Dieses Datum gilt bis heute als die Geburtsstunde der Quantentheorie. Über die ihm so seltsam aufgezwungene Annahme der Energiequantelung schrieb Planck rückschauend in einem Brief aus dem Jahre 1931 ([13]):

> „Das war eine rein formale Annahme [Energiequantelung], und ich dachte mir eigentlich nicht viel dabei, sondern eben nur das, daß ich unter allen Umständen, koste es, was es wolle, ein positives Resultat herbeiführen müßte. [...] Kurz zusammengefaßt kann ich die ganze Tat als einen Akt der Verzweiflung bezeichnen. Denn von Natur bin ich friedlich und bedenklichen Abenteuern abgeneigt.“

Im Anhang A ist Plancks „Akt der Verzweiflung“ nochmals etwas genauer beschrieben.

7 Einsteins Kritik

Einstein war mit Plancks theoretischer Begründung der Strahlungsformel (6) zutiefst unzufrieden. Dabei brachte er im wesentlichen zwei Hauptkritikpunkte vor:

1. Planck benutzt wesentlich Gleichung (3), die mit Hilfe der Maxwellschen Theorie abgeleitet ist und voraussetzt, daß der Energieaustausch zwischen Planckschen Resonatoren und Strahlungsfeld kontinuierlich verläuft, *im Gegensatz* zur Quantisierungsannahme (9). Zwar kann man zunächst argumentieren, daß (3) ja nur für den statistischen Mittelwert der Resonatorenergie Gültigkeit beansprucht und somit vielleicht auch unter einem gequantelten Energieaustausch, zumindest in guter Näherung, gültig bleibt[7]. Doch wäre das nur dann zu erwarten, wenn die mittlere Energie des einzelnen Resonators $\bar{E}(\nu, T)$ sehr groß gegen die Energieportionen (9) ist. Aus (3) und der Planckschen Formel (6) kann man aber $\bar{E}(\nu, T)$ direkt ablesen. Mit den Bezeichnungen (7) ergibt sich

$$\bar{E}(\nu, T) = \frac{h\nu}{\exp(h\nu/kT) - 1} \,. \tag{10}$$

   Demnach ist sogar umgekehrt $\bar{E}(\nu, T)$ sehr viel kleiner als $h\nu$, falls $h\nu$ viel größer als kT ist. Dies ist genau im Geltungsbereich des Wienschen Gesetzes der Fall, in dem die Annahme von (3) mit der Quantisierungsvorschrift ($h\nu \gg kT$) also unverträglich zu sein scheint.

2. Zur Berechnung von $\bar{E}(\nu, T)$ über die Entropie verwendet Planck die Boltzmannsche Entropiedefinition (12). Die zunächst nur durch formales Abzählen bestimmte mikroskopische Multiplizität eines makroskopischen Zustands ist jedoch nur dann proportional seiner physikalischen Wahrscheinlichkeit, wenn die Mikrozustände im Sinne der tatsächlich gegebenen Dynamik des Systems auch *physikalisch gleich wahrscheinlich* sind, soll heißen: im Laufe einer langen Zeit

[7] Dies war stets Plancks Haltung, die er noch 1910 öffentlich vertritt; siehe [12], Band 2, Dokument 71.

mit gleichen relativen Zeitdauern eingenommen werden. Da Planck für den Resonator die klassische Dynamik als richtig annimmt (z.B. in der Ableitung der Gleichung (3)), würde die Boltzmannsche Entropiedefinition korrekt angewendet notwendig zur Rayleigh-Jeans-Formel (5) führen. Diesbezüglich kommentiert Einstein 1909 in der ihm eigenen charmant-frechen Weise ([6], Band 2, Dokument 56, pp. 544-545):

> „So sehr sich jeder Physiker darüber freuen muß, daß sich Herr Planck in so glücklicher Weise über diese Forderung hinwegsetzte, so wenig wäre es angebracht, zu vergessen, daß die Plancksche Strahlungsformel mit der theoretischen Grundlage, von welcher Herr Planck ausgegangen ist, unvereinbar ist."

Diese Bedenken trägt Einstein u.a. auch in seinem umfassenden Bericht „Über die Entwicklung unserer Anschauungen über das Wesen und die Konstitution der Strahlung" auf der 81. Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte 1909 in Salzburg vor, wo der 30-Jährige seinen ersten größeren öffentlichen Auftritt hatte. In der sich anschließenden Diskussion erläutert Planck nochmals seine Sichtweise der Quantisierungsannahme (9), die er dezidiert aufgefaßt wissen wollte als Ausdruck eines noch unverstandenen Mechanismus, der lediglich die *Wechselwirkung* von Strahlung und Materie betraf. Materie war eben nur in der Lage, Energie in gewissen endlichen Portionen an das Strahlungsfeld anzugeben oder aus dem Strahlungsfeld aufzunehmen. Weder hatte Planck im Sinn, damit eine grundsätzliche Modifikation der Dynamik des Resonators auszusprechen und schon gar nicht eine Quantisierung des Strahlungsfeldes selbst zu postulieren. Er hoffte auf jeden Fall, die Maxwellsche Theorie des Elektromagnetismus, die durchweg von der Vorstellung kontinuierlicher Prozesse in Raum und Zeit ausgeht, zumindest im wechselwirkungsfreien Fall beizubehalten. Wörtlich sagte Planck: ([6], Band 2, Dokument Nr. 61, pp. 585-586):

> „Jedenfalls meine ich, man müßte zunächst versuchen, die ganze Schwierigkeit der Quantentheorie zu verlegen in das Gebiet der *Wechselwirkung* zwischen der Materie und der strahlenden Energie; die Vorgänge im reinen Vakuum könnte man dann vorläufig noch mit den Maxwellschen Gleichungen erklären."

Dem gegenüber steht Einsteins Resumee seines Vortrages: ([6], Band 2, Dokument Nr. 60, pp. 576-577):

> „Die Plancksche Theorie annehmen heißt nach meiner Meinung geradezu die Grundlagen unserer Strahlungstheorie verwerfen."

Während Plancks ablehnende Haltung gegenüber einer Modifikation der Maxwellschen Theorie des freien Strahlungsfeldes aus seinen Schriften ganz offenbar wird (was sich auch in seiner Kritik der Lichtquantenhypothese äußert), ist seine Haltung gegenüber einer Modifikation der mechanischen Gesetze, hier im Zusammenhang mit den Resonatoren, etwas umstritten. Diesbezüglich hat sich in jüngerer Zeit sogar ein sogenannter „Historikerstreit" entzündet (vgl. [5]), der mir aber etwas übertrieben scheint. In seiner ursprünglichen Ableitung macht Planck in der Tat die formale Annahme (9), ohne eine Modifikation der mechanischen Gesetze zu erwähnen. 1906 gibt Einstein eine Ableitung des Planckschen Gesetzes mit Hilfe der von ihm selbst entwickelten allgemeinen Methoden der statistischen Mechanik ([6], Band 2, Dokument 34). Dort zeigt er, daß man konsistent (d.h. unter Vermeidung der oben unter Punkt 2 geäußerten Kritik) zu (10) gelangt, wenn man annimmt, daß die Resonatoren selbst nur ganzzahlige Vielfache der Energie $h\nu$ annehmen können und formuliert dies als eigentliche, der Planckschen Ableitung zugrundeliegende Annahme. Auf die Verallgemeinerung dieser Annahme auf jedes schwingungsfähige Gebilde in einem Festkörper stützt Einstein kurz darauf seine Quantentheorie der spezifischen Wärme ([6], Band 2, Dokument 38). Planck ist damit aber nicht einverstanden und versucht später (1911-12) sogar, eine Ableitung seines Strahlungsgesetzes zu geben, in der nur der Prozeß der Emission, nicht jedoch der Prozeß der Absorption „gequantelt" ist ([12], Band 2, Dokumente 73,74,75).[8] Die Unterscheidung dieser „neuen Strahlungshypothese" Plancks von der ursprünglichen ist aber nur dann sinnvoll, wenn man annimmt, daß die Resonatorenergien grundsätzlich kontinuierliche Werte annehmen können. Daraus muß man m.E. schließen, daß zwar Einstein, aber nicht Planck die Gleichung (9) im heutigen quantenmechanischen Sinne verstanden haben wollte, nämlich als allgemeine Quantisierungsbedingung materieller schwingungsfähiger Systeme. In seiner „Lichtquantenhypothese" erweiterte Einstein diese Quantisierungsbedingung dann auch auf das freie Strahlungsfeld, was der heutigen Sichtweise der Quantenelektrodynamik entspricht.

8 Einsteins Lichtquantenhypothese

In den uns vorliegenden schriftlichen Dokumenten Einsteins kennzeichnet er nur eine einzige seiner wissenschaftlichen Ideen als „sehr revolutionär" ([6], Band 5, Dokument Nr. 27, p. 31)[9], nämlich die Lichtquantenhypothese. Diese veröffentlicht er im Jahre 1905, 26-jährig, im gleichen Zeitschriftenband wie seine spezielle Relativitätstheorie und die Theorie der Brownschen Bewegung. Die Arbeit trägt den Titel „Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt". Dieser „heuristische Gesichtspunkt" besteht in einer völlig anderen Interpretation der Planckschen Quantisierungsbedingung (9), nämlich als Eigenschaft des Strahlungsfeldes selbst. Er schreibt ([6], Band 2, Dokument Nr. 14, p. 151):

> „Nach der hier ins Auge zu fassenden Annahme ist bei Ausbreitung eines von einem Punkte ausgehenden Lichtstrahles die Energie nicht kontinuierlich auf größer und größer werdende verteilt, sondern es besteht dieselbe

[8] Dadurch erhält er eine Modifikation seines früheren Ausdrucks (10) für die mittlere Energie eines Resonators um einen additiven Term $h\nu/2$. Dies markiert das erste Auftreten der heute aus der Quantenmechanik wohlbekannten „Nullpunktsenergie".

[9] Bei diesem Dokument handelt es sich um einen Brief Einsteins an seinen Freund Conrad Habicht vom Mai 1905, dem Einstein vier wissenschaftliche Arbeiten mit folgenden Worten ankündigt: „Ich verspreche Ihnen vier Arbeiten dafür, von denen ich die erste in Bälde schicken könnte, da ich die Freiexemplare baldigst erhalten werde. Sie handelt über die Strahlung und die energetischen Eigenschaften des Lichtes und ist sehr revolutionär, wie Sie sehen werden, wenn Sie mir Ihre Arbeit *vorher* schicken. [...] Die vierte Arbeit liegt erst im Konzept vor und ist eine Elektrodynamik bewegter Körper unter Benützung einer Modifikation der Lehre von Raum und Zeit; der rein kinematische Teil dieser Arbeit wird Sie interessieren". Die zuletzt, eher lapidar angekündigte Arbeit, ist die spezielle Relativitätstheorie.

> aus einer endlichen Zahl von in Raumpunkten lokalisierten Energiequanten, welche sich bewegen, ohne sich zu teilen und nur als Ganze absorbiert und erzeugt werden können.“

Diese scheinbare Rückkehr zur längst überkommenen Partikelvorstellung des Lichts, die zwar noch Newton vertreten hatte, die aber dann im frühen 19. Jahrhundert durch den Siegeszug der Wellentheorie geradezu hinweggefegt wurde, mußte auf die Zeitgenossen Einsteins als eine Mischung aus naiv und provokant gewirkt haben, eben geradezu unverfroren. Äußerungen dazu werden uns weiter unten begegnen. Und doch war Einsteins Sichtweise, wie die seiner Gegner, nicht unbegründet. Durch eine scharfe Analyse des Strahlungsgesetzes, insbesondere des ihm immer suspekt erschienenen Wienschen Bereichs, zeigt er, daß ([6], Band 2, Dokument Nr. 14, p. 161):

> „Monochromatische Strahlung von geringer Dichte (innerhalb des Gültigkeitsbereiches der Wienschen Strahlungsformel) verhält sich in wärmetheoretischer Beziehung so, wie wenn sie aus voneinander unabhängigen Energiequanten von der Größe $h\nu$ bestünde“.

Die genauere Argumentation Einsteins ist in Anhang B erläutert.

Einstein ist klar, daß sich diese Vorstellung auch an der Erklärung bekannter Phänomene wird behaupten müssen, namentlich solcher, die die noch unverstandenen Prozesse bei der Wechselwirkung von Licht mit Materie betreffen. Einer dieser Prozesse ist der sogenannte „Photoelektrische Effekt“, bei dem durch Bestrahlung einer Metallplatte mit Licht Elektronen aus dem Material herausgelöst werden. Die Energie des ankommenden Lichtes wird also durch irgendeinen Prozeß dazu verwandt, das Elektron aus dem Atomverband herauszulösen, wozu eine nur vom Material abhängige Energie P aufzuwenden ist. Die überschüssige Energie des ankommenden Lichtes wird dann in die Bewegungsenergie E_{kin} des austretenden Elektrons investiert. Gemäß der traditionellen Wellentheorie des Lichtes erfolgt dessen Ausbreitung stetig über alle Raumbereiche. Da die Energie des Lichtes dann proportional zu seiner Intensität ist, müßte z.B. die Energie der herausgelösten Elektronen mit dem Abstand der Lichtquelle von der Metallplatte fallen, da mit dem Abstand auch die Intensität abnimmt. Was aber durch den Experimentalphysiker Philipp Lenard (1862-1947, Nobelpreis 1905) im Jahre 1900 tatsächlich beobachtet wurde, ist, daß zwar die Anzahl der herausgelösten Elektronen mit fallender Intensität abnimmt, nicht aber deren individuelle Energien, die sich als *von der Intensität des eingestrahlten Lichtes unabhängig* ergaben. Auf das einzelne Elektron wird also eine immer gleiche Energie übertragen. Dieser Tatbestand paßt nun überhaupt nicht zur Wellentheorie des Lichtes, wird aber sofort plausibel bei Zugrundelegung der Lichtquantenhypothese. Nach dieser wird jedes der einzelnen Elektronen durch ein ganzes, unteilbares Lichtquant der Energie $h\nu$ herausgelöst und mit einer Bewegungsenergie E_{kin} heraustreten, die der Differenz der Energie des Lichtquants zur Ablösungsenergie P entspricht:

$$E_{kin} = h\nu - P. \tag{11}$$

Diese sogenannte „Einsteinsche Gleichung“ zum Photoeffekt wurde teilweise durch Lenard und später vor allem durch den amerikanischen Experimentalphysiker Robert Millikan (1868-1953, Nobelpreis 1923) vollauf bestätigt, was sogar mit ein Grund für die Vergabe des Nobelpreises war: „for his work on the elementary charge of electricity and on the photoelectric effect". Somit schien der Photoeffekt mit einem Schlag eine völlig natürliche Erklärung zu finden – vorausgesetzt, man akzeptierte die Lichtquantenhypothese!

9 Kritik an der Lichtquantenhypothese

Trotzdem war aber allen Beteiligten klar, daß die Annahme der Einsteinschen Vorstellung der Lichtquanten völlig unvereinbar sein würde mit der gängigen (Maxwellschen) Theorie des Elektromagnetismus, die wenige Jahre zuvor durch die Aufsehen erregenden Versuche Heinrich Hertz' scheinbar so glänzend bestätigt wurde und auf die Planck die Ableitung seiner Ausgangsgleichung (3) wesentlich gestützt hatte. Die aus der Planckschen Strahlungsformel in gewisser Weise ableitbare Lichtquantenhypothese anzunehmen, hieße dann also gleichzeitig, der theoretischen Begründung dieser Formel den Boden zu entziehen. Das genau war die Kritik Einsteins, die er über viele Jahre hinweg in mannigfacher Variation immer wieder vorbrachte. Wenig überraschend ist es daher, daß die Einsteinsche Lichtquantenhypothese vor allem bei Planck, aber auch bei anderen Physikern auf starke Ablehnung stieß, darunter auch solche, die Einstein wissenschaftlich und persönlich sehr nahe standen (worunter man sonst auch Planck zählen muß, aber eben mit Ausnahme dieses einen Punktes betreffend die Lichtquantenhypothese). So beginnt z.B. der Theoretiker Arnold Sommerfeld, einer der besten Kenner der Materie und von Einstein sehr geachtet, im Jahre 1911 seinen längeren Vortrag auf der 83. Versammlung der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte so ([16], p. 31) :

> „Als der wissenschaftliche Ausschuß unserer Gesellschaft an mich die Aufforderung richtete, dieser Versammlung einen Bericht über die Relativitätstheorie zu erstatten, erlaubte ich mir dagegen geltend zu machen, daß das Relativitätsprinzip kaum mehr zu den eigentlich aktuellen Fragen der Physik gehöre. Obwohl erst 6 Jahre alt – Einsteins Arbeit erschien 1905 – scheint es schon in den gesicherten Besitz der Physik übergegangen zu sein. Ganz anders aktuell und problematisch ist die Theorie der *Energiequanten* [...]. Hier sind die Grundbegriffe noch im Fluß und die Probleme ungezählt."

Und fährt kurz darauf fort:

> „Einstein zog aus der Planckschen Entdeckung die weitestgehenden Folgen [...] und übertrug das Quantenhafte von dem Emissions- und Absorptionsvorgang auf die Struktur der Lichtenergie im Raume, ohne, wie ich glaube, seinen damaligen Standpunkt heute noch in seiner ganzen Kühnheit aufrecht zu erhalten."

Und selbst der bereits erwähnte große amerikanische Experimentalphysiker Robert Millikan, der 10 Jahre seines Forscherlebens der experimentellen Überprüfung der Einsteinschen Formel (11) für den Photoeffekt widmete und dadurch auch die ersten Präzisionsmessungen des Planckschen Wirkungsquantums h realisierte (siehe Anhang D), schrieb 1916 in einem langen, zusammenfassenden Artikel über die gerade von ihm so glänzend bestätigte Einsteinsche Formel ([9], p. 384):

> „Despite then the apparently complete success of the Einstein equation, the physical theory of which it was designed to be the symbolic expression is found so untenable that Einstein himself, I believe, no longer holds to it.“

Die Lichtquantenhypothese im allgemeinen kommentiert Millikan bereits auf der ersten Seite seines Artikels wie folgt ([9], p. 355):

> „This hypothesis may well be called reckless, first because an electromagnetic disturbance which remains localized in space seems a violation of the very conception of an electromagnetic disturbance, and second because it flies in the face of the thoroughly established facts of interference.“

Kurz zuvor, im Jahre 1913, als Einstein die Ehre zuteil wird, in die Preußische Akademie der Wissenschaften aufgenommen zu werden, verfassen Planck, Nernst, Rubens und Warburg ein Empfehlungsschreiben, das mit folgenden Worten endet ([6], Band 5, Dokument Nr. 445, p. 527):

> „Zusammenfassend kann man sagen, daß es unter den großen Problemen, an denen die moderne Physik so reich ist, kaum eines gibt, zu dem nicht Einstein in bemerkenswerter Weise Stellung genommen hätte. Daß er in seinen Spekulationen gelegentlich auch einmal über das Ziel hinausgeschossen haben mag, wie z.B. in seiner Hypothese der Lichtquanten, wird man ihm nicht allzuschwer anrechnen dürfen; denn ohne ein Risiko zu wagen, läßt sich auch in der exaktesten Naturwissenschaft keinerlei wirkliche Neuerung einführen.“

Acht Jahre später, 1921, wird Einstein für die Erklärung des Photoelektrischen Effektes mit Hilfe der Lichtquantenhypothese der Nobelpreis für Physik zuerkannt. Aber auch danach verklingen die Zweifel noch nicht. Ein Jahr nach Einstein bekommt Niels Bohr den Nobelpreis. In seiner Nobel-Vorlesung mit dem Titel „The Structure of the Atom“ schlägt Bohr ganz ähnliche Töne an wie sechs Jahre zuvor Millikan. Unter anderem findet sich in der Niederschrift von Bohrs Vorlesung folgender eindrücklicher Passus [1]:

> „This phenomenon [des Photoelektrischen Effekts], which had been entirely unexplainable on the classical theory, was thereby placed in quite a different light, and the predictions of Einstein's theory have received such exact experimental confirmation in recent years, that perhaps the most exact determination of Planck's constant is afforded by measurements on the photoelectric effect. In spite of this heuristic value, however, the hypothesis of light-quanta, which is irreconcilable with so-called interference phenomena, is not able to throw light on the nature of radiation. I need only recall that these interference phenomena constitute our only means of investigating the properties of radiation and therefore of assigning any closer meaning to the frequency which in Einstein's theory fixes the magnitude of the light-quantum.“

Wie bereits erwähnt, folgte auf Bohr Millikan als Physik-Nobelpreisträger des Jahres 1923. In seiner Nobel-Vorlesung mit dem Titel „ The electron and the light-quant from the experimental point of view“ äußert auch er sich nochmals kritisch, wenn auch mittlerweile in etwas abgeschwächter Form (die Hervorhebungen sind seine) [10]:

> „ In view of this methods and experiments the general validity of Einstein's equation [gemeint ist Gleichung (11)] is, I think, now universally conceded, and *to that extent the reality of Einstein's light-quanta may be considered as experimentally established.* But the conception of *localized* light-quanta out of which Einstein got his equation must still be regarded as far from being established. Whether the mechanism of interaction between ether waves and electrons has its seat in the unknown conditions and laws existing within the atom, or is to be looked for primarily in the essentially corpuscular Thomas-Planck-Einstein conception as to the nature of radiant energy is the all-absorbing uncertainty upon the frontiers of modern Physics.“

Ein letztes dramatisches Aufbäumen der Kritiker äußerte sich 1924 in einer damals sehr viel Aufsehen erregenden Arbeit von Bohr, Kramers und Slater [2], in der eine statistische Theorie der Wechselwirkung zwischen Strahlung und Materie formuliert wird mit dem erklärten Ziel, gänzlich ohne die Lichtquanten auszukommen. Als Preis dafür sollte man hinnehmen, daß die Erhaltungssätze von Energie und Impuls zwar im statistischen Mittel, nicht jedoch für den individuellen Elementarprozeß gültig seien. Dabei hatte gerade ein Jahr zuvor Arthur Compton (1892-1962, geteilter Nobelpreis 1927) die klassisch unverständlichen[10] Eigenschaften der Streuung von Röntgenstrahlen an Materie mit der Annahme erklärt, daß es sich dabei um individuelle Stöße von Lichtquanten mit einzelnen Elektronen handle, wobei für jeden Stoß individuell Energie- und Impulserhaltung gelten [3] (sogenannter Comptoneffekt). Dies mag andeuten, wie verzweifelt der Vorschlag von Bohr, Kramers und Slater damals war, die nun argumentierten mußten, daß die Phänomene auch mit einer nur im statistischen Mittel gültigen Energieerhaltung verträglich wären, was aber schon kurz darauf durch zahlreichen Experimente widerlegt wurde (z.B. auch wieder durch Compton; siehe [4]). Erst ab 1925, das auch das Geburtsjahr der Quantenmechanik ist, kann man also davon sprechen, daß sich Einsteins Lichtquantenhypothese in den maßgebenden Fachkreisen wirklich durchgesetzt hatte.

10 Zusammenfassung und Ausblick

Plancks größte wissenschaftliche Leistung ist auf ironisch und fast tragische Weise erkauft mit dem Scheitern seines groß angelegten Planes, dessen Ziel es war, den 2. Hauptsatz als streng kausales Gesetz aus den Gesetzen der Elektrodynamik zu begründen. Auf seinem Weg dorthin findet er stattdessen ein neues, experimentell glänzend bestätigtes Strahlungsgesetz unter Zugrundelegung der von ihm sonst vehement bekämpften statistischen Entropiedefinition. Die theoretischen Implikationen dieses Gesetzes, namentlich die Lichtquantenhypothese Einsteins, entziehen Planck

[10] Man beobachtet z.B. eine Zunahme der Wellenlänge des gestreuten Röntgenlichts, ganz im Gegensatz zur wellentheoretischen Streutheorie (nach J.J. Thomson). Im Bild der Lichtquanten entspricht diese einfach der Abgabe von Energie des Lichtquants an das als ruhend (bzw. hinreichend langsam) angenommene Elektron.

geradezu die gesamte Grundlage, von der aus er ursprünglich startete. Wie kein anderer förderte Einstein in dieser Zeit durch hartnäckiges Hinterfragen der Grundlagen der Planckschen Strahlungstheorie den endgültigen Bruch mit der klassischen Physik. So wurde Planck *durch Einstein* zum Revolutionär wider Willen.

Aber auch Einstein selbst bleibt dieses Schicksal nicht erspart. Noch 1916 gibt er eine wunderbar einfache Ableitung der Planckschen Strahlungsformel, die nun vollständig auf den Gebrauch der Beziehung (3) verzichtet.[11]. Dazu betrachtet Einstein die Absorption und Emission von Licht als statistische Prozesse, möglicherweise in der Hoffnung, sie später doch noch deterministisch verstehen zu können. Interessanterweise muß er, um zur Planckschen Formel zu gelangen, neben dem Prozeß der *spontanen* Emission auch einen bis dahin unbekannten Prozeß der *induzierten* Emission postulieren (ohne ihn wäre er formal zum Wienschen Gesetz gelangt), der später die Grundlage des Funktionsprinzips des Lasers werden sollte. Bezüglich der statistischen Natur dieser Prozesse schreibt er am Ende dieser Arbeit ([6], Band 6, Dokument Nr. 38, p. 396):

> „Die Schwäche der Theorie liegt einerseits darin, daß sie uns dem Anschluß an die Undulationstheorie [d.h. Wellentheorie] nicht näher bringt, andererseits darin, daß sie Zeit und Richtung der Elementarprozesse [der Lichtabsorption und Emission] dem ‘Zufall’ überläßt; trotzdem hege ich das volle Vertrauen in die Zuverlässigkeit des eingeschlagenen Weges“.

Doch führte eben dieser eingeschlagene Weg nach weiteren 10 Jahren geradewegs zur heutigen Quantenmechanik (1925-26) und Quantenelektrodynamik (1928), die Einstein mit seinen wissenschaftlichen Grundüberzeugungen nicht in Einklang bringen konnte – insbesondere deshalb, weil in ihnen der Zufall als irreduzibler Bestandteil der Naturerklärung auftritt. Doch das genauer zu erläutern, bedürfte eines weiteren Vortrags.

Betrachtet man rückblickend die frühe Entstehungsgeschichte der Quantentheorie, so hätte sie beim besten Willen ironischer nicht sein können. Wir erinnern uns, daß ihr Ausgangspunkt die gemessenen Abweichungen vom Wienschen Gesetz waren, welches zu diesem Zeitpunkt (fälschlicherweise) als strenge Konsequenz der klassischen Physik angenommen wurde, maßgeblich durch die Arbeiten von Planck. Wie Einstein in seiner Lichtquantenarbeit aber gezeigt hatte, repräsentiert das Wiensche Gesetz gerade den typisch quantentheoretischen Teilchenaspekt der Strahlung. Die von Lummer und Pringsheim gemessenen Abweichungen vom Wienschen Gesetz liegen im langwelligen Bereich, in dem das Rayleigh-Jeans-Gesetz annähernd gültig ist, das nun tatsächlich eine unabweisbare Konsequenz der klassischen Physik ist, wie Einstein ebenfalls zeigte, und dem Wellenbild der Strahlung entspricht. *Etwas überspitzt kann man im Nachhinein also sagen, daß die Quantentheorie aus Messungen klassischer Korrekturen an einem glücklich erratenen Quantengesetz entstand, das irrtümlich für ein Gesetz der klassischen Physik gehalten wurde.*

Als Ausblick sei zum Schluß noch erwähnt, daß nicht nur in der Wissenschaft vom Kleinsten, sondern auch in den größten uns heute zugänglichen Dimensionen, in

[11] Diese Beziehung, die von Planck auf rein klassischem Wege abgeleitet wurde, kann tatsächlich auch durch die Quantenmechanik und Quantenelektrodynamik begründet werden; siehe z.B. Kap. 15 in [7] für eine instruktive „halbklassische“ Ableitung. Im wesentlichen muß das Verhältnis der Wahrscheinlichkeiten für die spontane und induzierte Emission berechnet werden.

der Kosmologie, die Plancksche Strahlungsformel eine zentrale Rolle spielt. So ist ja unser gesamtes Universum ein einziger Strahlungshohlraum, der erfüllt ist von einer elektromagnetischen Strahlung der Temperatur von etwas unter 3 Grad Kelvin (etwa -270 Grad Celsius). Diese Strahlung entstand etwa 30 000 Jahre nach dem Urknall, als sich aus zunächst gegenseitig ungebundenen Elektronen und Atomkernen stabile Atome bildeten. Zu diesem Zeitpunkt betrug die Temperatur etwa 100 000 Grad Kelvin. Wegen der beständigen Ausdehnung des Universums kühlt sich die Strahlung stetig ab und hat zur gegenwärtigen Epoche den eben genannten Wert. Seit einigen

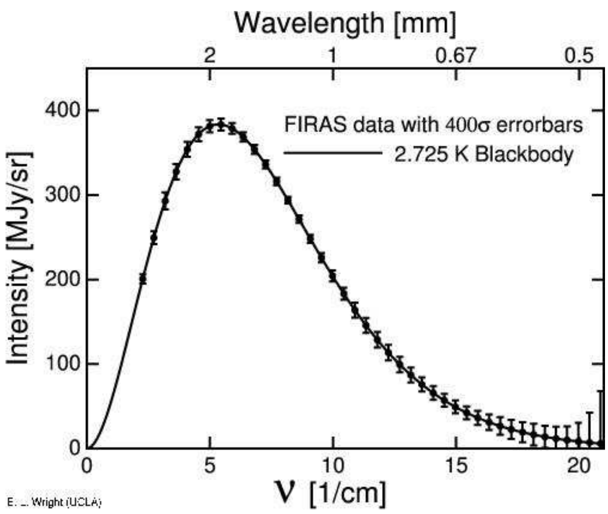

Abbildung 2: Planck-Spektrum des kosmischen Mikrowellenhintergundes, aufgenommen durch FIRAS (Far Infrared Absolute Spectrophotometer) des Satelliten COBE (Cosmic Background Explorer). Die Fehlerbalken sind für 400 Standardabweichungen!

Jahren werden charakteristische Eigenschaften dieser sogenannten „Kosmischen Hintergrundstrahlung“ durch Satelliten vermessen, da diese eine reiche Fülle von Informationen über Entwicklung und Zusammensetzung unseres physikalischen Universums verraten. Natürlich wurde dabei auch die spektrale Energieverteilung gemessen und mit der Planckschen Formel verglichen. Das Resultat ist in Abbildung 2 dargestellt, in der die Fehlerbalken auf unnatürliche 400 (!) Standardabweichungen vergrößert wurden, damit sie überhaupt sichtbar sind. Normale Fehlerbalken von wenigen Standardabweichungen wären weniger hoch als die Strichdicke der Kurve. Damit ist dies die präzisest vermessene Planckkurve bis zum heutigen Tag.

ANHÄNGE

A Näheres zu Plancks „Akt der Verzweiflung“

Es wurde beschrieben, daß Planck bei der theoretischen Begründung sowohl des Wienschen als auch seines eigenen Strahlungsgesetzes stets von der Beziehung (3) ausging und daß er die darin auftretende Funktion $\overline{E}(\nu, T)$, die die mittlere Energie eines Resonators der Eigenfrequenz ν im Strahlungsfeld der Temperatur T angibt, durch die Entropiefunktion $S(\nu, T)$ dieses Resonators zu bestimmen suchte. So ging er auch bei der theoretischen Begründung seines Gesetzes (6) am 19. Dezember 1900 vor. Dazu wandte er die statistische Definition der Entropie von Ludwig Boltzmann an. Diese besagt, daß die Entropie eines Systems proportional zum natürlichen Logarithmus des statistischen Gewichtes dieses Zustandes ist. Letzteres ist definiert als die Anzahl W der Möglichkeiten, den (makroskopisch definierten) Zustand auf verschiedene mikroskopische Arten zu realisieren. Dies drückt folgende Formel aus (genannt die „Boltzmannsche“, die aber erst Planck so hinschrieb), die man noch heute auf der Grabplatte Boltzmanns auf dem Wiener Zentralfriedhof bewundern kann:

$$S = k \ln(W) . \tag{12}$$

Dabei ist eben k die Proportionalitätskonstante zwischen Entropie und Logarithmus des statistischen Gewichtes. Man kann zeigen, daß diese Konstante gerade gleich ist dem Quotienten aus zwei uns bereits bekannten Größen, nämlich der universellen Gaskonstante R und der Avogadro-Zahl N_A.

In seiner Verzweiflung, endlich eine theoretische Begründung seiner bisher nur glücklich erratenen Strahlungsformel (6) liefern zu müssen, verfiel Planck auf den Ausweg, die Boltzmannsche Gleichung (12) als Definition der Entropie zu akzeptieren und sie zur Berechnung der Entropie eines Resonators im Strahlungsfeld zu verwenden. Dazu ging Planck so vor: Angenommen, es gibt n Resonatoren der Eigenfrequenz ν, die zusammengenommen in einem Zustand der Energie E_{total} sind. Dann ist das statistische Gewicht W dieses Zustandes definiert durch die Anzahl der Möglichkeiten, die Energie E_{total} auf die n Resonatoren zu verteilen. Physikalisch geht hier die oft nicht explizit genannte, aber dennoch sehr wichtige Hypothese ein, daß jede dieser Verteilungen gemäß der Dynamik des Systems im Laufe der Zeit gleich häufig vorkommt.

Wären die Resonatoren in der Lage, kontinuierliche Mengen von Energie aufzunehmen und abzugeben, so wäre das statistische Gewicht unendlich und Formel (12) ergäbe ebenfalls keinen endlichen Wert. Diesen Schluß kann man durch die Annahme umgehen, daß jeder der Resonatoren seine Energie nur portionsweise in Einheiten einer festen Grundmenge aufnehmen und abgeben kann. Sei diese Grundmenge ε, so gibt es also insgesamt $n = E/\varepsilon$ Energieportionen zu verteilen. Es ist nun eine elementare kombinatorische Aufgabe, zu berechnen, wie viele Möglichkeiten es gibt, n Portionen Energie auf N Resonatoren zu verteilen. Die Antwort ist

$$W = \frac{(n + N - 1)!}{n!(N-1)!} . \tag{13}$$

Daraus erhält man mit (12) die Entropie des Zustandes aller Resonatoren der Eigenfrequenz ν und nach weiterer Division durch die Anzahl N dieser Resonatoren die gesuchte Entropie eines einzelnen Resonators der Eigenfrequenz ν. Das Ergebnis kann man ausdrücken[12] durch die mittlere Energie $E = E_{\text{total}}/N$ eines Resonators und des noch unbekannten „Energiequantums" ε:

$$S = \big(1 + E/\varepsilon\big) \cdot \ln\big(1 + E/\varepsilon\big) - \big(E/\varepsilon\big) \cdot \ln\big(E/\varepsilon\big)\,. \tag{14}$$

Damit ist die Aufgabe fast gelöst. Denn es gilt in der Thermodynamik immer (unabhängig davon, ob man die statistische Interpretation der Entropie zugrundelegt), daß die Ableitung der Entropie nach der Energie gleich dem Kehrwert der Temperatur ist:

$$\frac{dS}{dE} = \frac{1}{T}. \tag{15}$$

Wendet man dies auf (14) an, so kann man sofort E als Funktion von ε und T berechnen, was dann eingesetzt in (3) für das Strahlungsgesetz liefert:

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{\varepsilon}{\exp(\varepsilon/kT) - 1}\,. \tag{16}$$

Damit dies dann dem Planckschen Strahlungsgesetz (6) gleicht, muß man eine Annahme über die tatsächliche Größe der „Energiequanten" ε machen, was ja bisher noch nicht geschehen ist. Schon aus einem direkten Vergleich von (16) mit der allgemein gültigen Gleichung (1) ergibt sich, daß ε proportional zu ν sein muß. Nennt man die Proportionalitätskonstante h, die die Dimension einer Wirkung haben muß, so hat man gerade (9), und es ergibt sich die Plancksche Formel.

Denkt man sich die Planckschen Energieportionen als Lichtquanten, d.h. im Raum lokalisierte Energiepakete, so entspricht die durch (13) ausgedrückte Abzählung der sogenannten *Bose-Einstein-Statistik*. An dieser ist bemerkenswert, daß die Lichtquanten als *ununterscheidbare* Entitäten behandelt werden, d.h. es ist egal, welche der N Lichtquanten den individuellen Resonator besetzen, wichtig ist nur ihre Anzahl. Für Planck war (13) jedoch nicht Ausdruck einer irgendwie ungewöhnlichen Statistik, da er nicht im Bild der Lichtquanten argumentierte. So bekommt man etwa (13) auch als Antwort auf die Frage, wieviel Möglichkeiten es gibt, N Kellen Suppe auf n (unterscheidbare) Teller zu verteilen. Der Planckschen Quantisierungsannahme entspricht hier lediglich die Regel, immer nur ganze Kellen an Suppe zu verteilen.

[12] Man verwendet dazu die Näherungsformel $\ln(N!) \approx N\ln(N) - N$, die für große N gültig ist. Nach Planck werden an dieser Stelle sowohl N als auch n als groß angenommen. Letzteres ist tatsächlich nicht immer korrekt, was Einstein Planck später vorwirft.

B Näheres zu Einsteins Lichtquantenhypothese

In diesem Anhang wollen wir etwas näher ausführen, durch welche mathematische Schlußkette Einstein zu seiner Lichtquantenhypothese geführt wurde. Grundlage ist wieder das Boltzmannsche Prinzip (12). In diesem dürfen wir W auch durch die Wahrscheinlichkeit des Makrozustands ersetzen, denn diese ist proportional zur Anzahl W seiner mikroskopischen Realisierungen. Das Ersetzen von W durch einen dazu proportionalen Ausdruck unter dem Logarithmus führt aber zu einer additiven Konstanten zur Entropie, die in den nachfolgenden Überlegungen herausfällt, da stets nur Entropie*differenzen* eine Rolle spielen.

Als Vorbereitung betrachte man ein Gas aus N Atomen in einem Volumen V bei fester Temperatur T. Hinsichtlich der Dynamik der Atome wird nur vorausgesetzt, daß ihre Aufenthaltswahrscheinlichkeit im Volumen konstant ist, daß also Teilvolumina gleichen Inhalts auch mit gleicher Wahrscheinlichkeit von einem Atom besetzt werden. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich alle Atome in einem Teilvolumen $V_0 \subset V$ befinden, ist dann gegeben durch $(V_0/V)^N < 1$. Entsprechend hat dieser Zustand eine um einen Betrag ΔS geringere Entropie als der über ganz V gleichverteilte Zustand, wobei

$$\Delta S = S - S_0 = k \cdot \ln \left(\frac{V}{V_0} \right)^N . \tag{17}$$

Eine analoge Überlegung stellt Einstein nun mit Wärmestrahlung an, ebenfalls im Volumen V bei der Temperatur T. Dazu muß er aber den Ausdruck für die Strahlungsentropie berechnen. Diesen erhält er so: Sei $\rho(\nu, T)$ die spektrale Dichte der Energie (hier als bekannt vorausgesetzt) und $\varphi(\nu, T)$ der (zu bestimmende) Ausdruck für die spektrale Dichte der Entropie. Das heißt, daß der auf das Volumen V und das Frequenzintervall $[\nu\,,\,\nu + d\nu]$ entfallende Anteil der Strahlungsenergie durch $\rho(\nu, T)V\,d\nu$ und der Anteil der Strahlungsentropie durch $\varphi(\nu, T)V\,d\nu$ gegeben ist. Ganz allgemein gilt in der Thermodynamik, daß die Ableitung der Entropie nach der Energie das Inverse der absoluten Temperatur T ist. Das gilt auch für die spektralen Verteilungen. Also hat man

$$\frac{\partial \rho}{\partial \varphi} = \frac{1}{T} . \tag{18}$$

Kennt man das Strahlungsgesetz, d.h. die Funktion $\rho(\nu, T)$, so kann man damit auf der rechten Seite $1/T$ als Funktion von ν und ρ ausdrücken und die Gleichung integrieren, wodurch man φ als Funktion von ν und ρ erhält.

Einstein benutzt nun nicht das Plancksche, sondern das Wiensche Gesetz (vgl. (2), das sich im Grenzfall hoher Frequenzen und/oder kleiner Temperaturen aus ersterem ergibt. Löst man dieses nach $1/T$ auf, setzt es auf der rechten Seite von (18) ein und integriert einmal nach ρ, so erhält man

$$\varphi(\nu, T) = -\frac{\rho}{b\nu} \cdot \left[\ln \left(\frac{\rho}{a\nu^3} \right) - 1 \right] + \mathrm{konst.} \tag{19}$$

Setzt man für die im Volumen V und Frequenzintervall $[\nu\,,\,\nu + d\nu]$ enthaltene Energie $E = \rho V\,d\nu$ und Entropie $S = \varphi V\,d\nu$, so kann man dies auch so schreiben:

$$S(E, \nu) = -\frac{E}{b\nu} \cdot \left[\ln \left(\frac{E}{V a \nu^3\,d\nu} \right) - 1 \right] + \mathrm{konst.} \tag{20}$$

Betrachtet man bei konstantem E und ν die Differenz der Entropien der Strahlung, einmal im Volumen V und einmal im Volumen V_0, so erhält man

$$\Delta S = S - S_0 = \frac{E}{b\nu} \cdot \ln\left(\frac{V}{V_0}\right) = k \cdot \ln\left(\frac{V}{V_0}\right)^{E/bk\nu} . \qquad (21)$$

Dies vergleicht Einstein mit (17) und kommt zu dem Schluß, daß sich Wärmestrahlung im Gültigkeitsbereich des Wienschen Strahlungsgesetzes entropisch gesehen so verhält, wie ein Gas aus $N = E/bk\nu$ Atomen (siehe das Zitat Einsteins auf Seite 14). Die „Atome“ des Lichts heißen *Lichtquanten*. Sie sind (im Gültigkeitsbereich des Wienschen Gesetzes!) als räumlich lokalisiert zu denken und haben die Energie

$$\varepsilon = E/N = bk\nu = h\nu , \qquad (22)$$

wobei wir noch ausgenutzt haben, daß die Konstante b des Wienschen Gesetzes mit der Planckschen Konstante h über die Boltzmann-Konstante k gemäß $h = bk$ verbunden ist.

C Erster experimenteller Hinweis auf die Quantentheorie

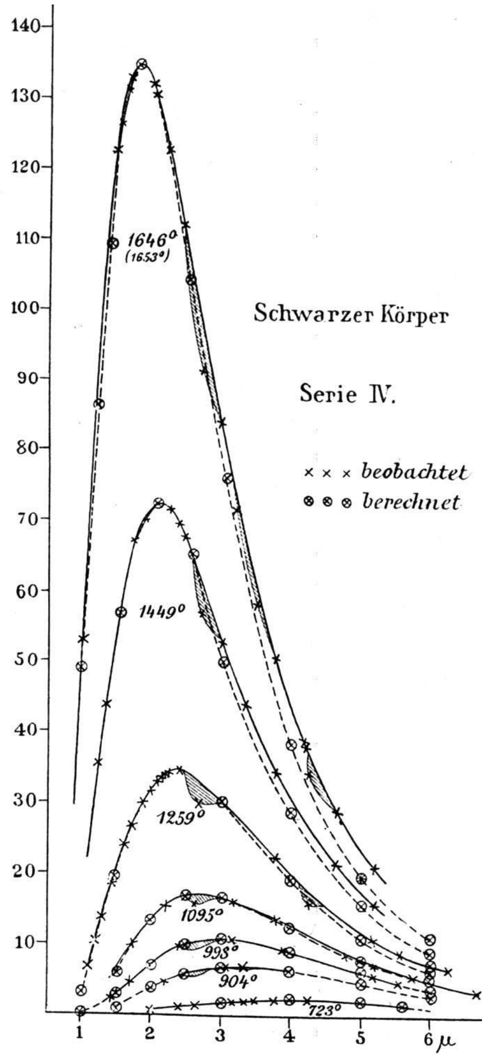

Abbildung 3: Wiedergabe von Fig. 1 aus der Originalveröffentlichung [3]. Aufgetragen nach oben ist die Energiedichte der Strahlung, nach rechts ihre Wellenlänge in Einheiten von $\mu = 10^{-6}\,\mathrm{m}$. Die durch die Symbole $\times$ markierte, von Lummer und Pringsheim gemessene Kurve, verläuft im langwelligen Bereich (rechts, jenseits des Maximums) systematisch oberhalb der durch die Symbole $\otimes$ markierten Kurve, die den theoretisch bestimmten Werten gemäß der Wienschen Strahlungsformel (2) entspricht. Die schraffierten Einbuchtungen der gemessenen Kurve bei etwa $2{,}7\,\mu$ und $4{,}5\,\mu$ werden durch bekannte Absorptionsbanden des Wasserdampfes bzw. der Kohlensäure verursacht.

D Millikans Messungen zum Photoeffekt und seine Präzisionsbestimmung des Planckschen Wirkungsquantums

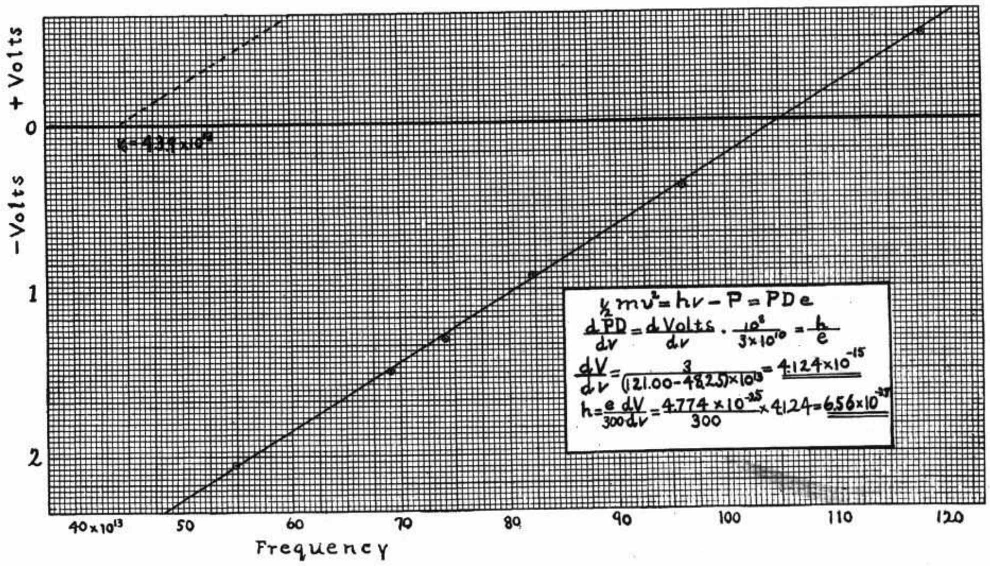

Abbildung 4: Meßkurve aus Millikans Veröffentlichung [9], in der die lineare Beziehung (11) zwischen der kinetischen Energie des aus dem Metall gelösten Elektrons und der Frequenz des eingestrahlten Lichts deutlich sichtbar ist. Auf der Ordinate ist statt E_{kin} die Spannung $V = E_{kin}/e$ (e=Elementarladung) in Volt aufgetragen, auf der Abszisse die Frequenz des Lichts in Einheiten von $10^{13}\,\mathrm{Hz}$. Aus der Steigung (und dem Wert für die Elementarladung) erhält Millikan einen Wert für das Plancksche Wirkungsquantum von $h = 6{,}56 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{erg}$ ($\mathrm{erg} = \mathrm{g\,cm^2/s^2} = 10^{-7}\mathrm{Joule}$). Dieser liegt 1% unterhalb des heute genauesten Wertes von $6{,}629\,0693 \cdot 10^{-27}\mathrm{erg}$ (relativer Fehler $1{,}7 \cdot 10^{-7}$). Gemittelt über verschiedene Messungen kommt Millikan tatsächlich noch etwas näher an diesen Wert. Da Millikan die kinetische Energie der Austrittselektronen über die von ihnen durchlaufene Spannung V mißt, kommt der Wert der Elementarladung e ins Spiel und somit auch dessen experimentelle Unsicherheit.

E Energiefluktuationen

Als Planck seine Formel zum ersten Mal niederschrieb, geschah dies ohne Kenntnis der erst später von ihm erdachten Ableitung. Vielmehr erhielt er sie, indem er eine gewisse thermodynamische Größe für die Wiensche und die Rayleigh-Jeanssche Formel einfach addierte. Eine physikalische Interpretation dieses formalen Vorgehens hatte Planck nicht – wie er später selber zugab. Erst Einstein hat diese Interpretation später geliefert, die einen interessanten Aspekt des „Welle-Teichen-Dualismus“ darstellt.

Setzen wir zur Abkürzung $\beta := 1/(kT)$ und sei $\bar{E}$ wieder die mittlere Energie eines Resonators, jetzt aufgefaßt als Funktion von β (statt T) und ν, so ist die von Planck betrachtete Größe gegeben durch die Ableitung $-d\bar{E}/d\beta$. Was bedeutet Sie? Bevor wir dies klären, wollen wir sie für die aus den drei Strahlungsgesetzen (Rayleigh-Jeans, Wien, Planck) folgenden Ausdrücke für $\bar{E}$ berechnen. Es ist

$$\bar{E} = \begin{cases} 1/\beta & \text{Rayleigh-Jeans} \\ h\nu\, \exp(-\beta h\nu) & \text{Wien} \\ \frac{h\nu}{\exp(\beta h\nu)-1} & \text{Planck}\,, \end{cases} \tag{23}$$

also gilt

$$-\frac{d\bar{E}}{d\beta} = \begin{cases} \bar{E}^2 & \text{Rayleigh-Jeans} \\ h\nu\, \bar{E} & \text{Wien} \\ \bar{E}^2 + h\nu\, \bar{E} & \text{Planck}\,. \end{cases} \tag{24}$$

Somit ist in der Tat für das Plancksche Gesetz diese Größe (als Funktion von $\bar{E}$) additiv aus den entsprechenden Ausdrücken des Rayleigh-Jeansschen und Wienschen Gesetzes zusammengesetzt.

Einsteins Überlegungen sind nun statistischer Natur – genauer gesagt betrachtet er statistische Fluktuationen der Energie des Strahlungsfeldes, was man wegen (3) auch auf die Resonatoren übertragen kann. Dabei ist seine zentrale Idee, die Boltzmannsche Gleichung (12) umgekehrt zu lesen, d.h. das statistische Gewicht als Funktion der Entropie auszudrücken. Drückt man die Entropie (bei fester Temperatur) als Funktion der Energie aus und entwickelt um das dem Gleichgewicht entsprechende lokale Maximum bei $\bar{E} = \bar{E}_0$, so kann man daraus in quadratischer Ordnung die normierte Wahrscheinlichkeitsverteilung für eine Energiefluktuation $\epsilon = \bar{E} - \bar{E}_0$ ableiten:

$$P(\epsilon) = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}}\, \exp\left(-\tfrac{1}{2}\gamma\epsilon^2\right)\,. \tag{25}$$

Hier ist

$$\gamma := -k^{-1} \cdot \frac{d^2}{d\bar{E}^2}\bigg|_{\bar{E}=\bar{E}_0} = -\frac{d\beta}{d\bar{E}}\bigg|_{\bar{E}=\bar{E}_0}\,, \tag{26}$$

wobei die zweite Gleichheit aus der allgemein gültigen thermodynamischen Relation (15) folgt. Also ist das mittlere Schwankungsquadrat der Energie gegeben durch:

$$\langle\epsilon^2\rangle := \int_{-\infty}^{\infty} P(\epsilon)\epsilon^2\, d\epsilon = \gamma^{-1} = -\frac{d\bar{E}}{d\beta}\,. \tag{27}$$

Damit ist die Größe, die Planck seiner formalen Interpolation zugrundelegte, als das mittlere Schwankungsquadrat der Energie erkannt. Dieses verhält sich bei der

Planckschen Formel so, als ob es zwei statistisch unabhängige Ursachen hätte: die Energieschwankungen der Rayleigh-Jeans-Formel, die man mit dem klassischen Wellenbild erklären kann, und die der Wienschen Formel, die dem Teilchenbild der Lichtquanten entspricht. In dieser Hinsicht vereinigt die Plancksche Formel beide Aspekte in gleichberechtigter Weise.

Stellt man das Gesagte konsequent im Teilchenbild (Lichtquanten) dar, so kann man statt von Resonatorenergien von Besetzungszahlen n sprechen, indem man jede Energie durch $h\nu$ dividiert. Aus der letzten Zeile in (24) erhält man dann einen einfachen Ausdruck für das Schwankungsquadrat der Besetzungszahl:

$$\langle (n - \bar{n})^2 \rangle = \bar{n} + \bar{n}^2 \qquad (28)$$

Der erste Term wäre alleine vorhanden, wenn es sich um klassisch unabhängige Teilchen handelte, wie man leicht nachprüft.[13]

[13] Die Wahrscheinlichkeit, von N unterscheidbaren Teilchen irgendwelche n in einem Zustand der Wahrscheinlichkeit p anzutreffen (z.B. im Teilvolumen $V_0 \subset V$ zu sein, wobei $V_0/V = p$), ist $W(n) = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n}$. Man berechnet nun leicht $\bar{n} = \langle n \rangle := \sum_{n=0}^{N} n W(n) = Np$ und $\langle n(n-1) \rangle := \sum_{n=0}^{N} n(n-1) W(n) = N(N-1)p^2$. Aus beiden zusammen ergibt sich $\langle (n - \bar{n})^2 \rangle = \bar{n}(1-p)$, was für kleine p in $\bar{n}$ übergeht.

Literatur

[1] Niels Bohr: „The Structure of the Atom“. Nobel-Vorlesung vom 11. Dezember 1922 (Nobelpreis 1922).
Online unter ⟨nobelprize.org/physics/laureates/1922/bohr-lecture.html⟩.

[2] Niels Bohr, Hendrik Kramers und J. Slater: „Über die Quantentheorie der Strahlung“. Zeitschrift für Physik, 24 (1924) pp. 69-87.

[3] Arthur H. Compton: „A quantum theory of the scattering of X-rays by light elements.“ Physical Review 21 (1923) pp. 483-502.

[4] Arthur H. Compton: „Directed quanta of scattered X-rays“. Physical Review 26 (1925) pp. 289-299.

[5] Oliver Darrigol: „The historians disagreement over the meaning of Planck’s quantum“. Centaurus, 43 (2001) 219-239.
Online unter ⟨www.mpiwg-berlin.mpg.de/de/forschung/preprints.html⟩ als Preprint Nr. 150 verfügbar.

[6] Albert Einstein: Collected Works (Princeton University Press). Siehe auch die Internetseite des „Einstein Papers Project“: ⟨www.einstein.caltech.edu⟩.

[7] Gerald Grawert: „Quantenmechanik“ (Akademische Verlagsgesellschaft Wiesbaden 1977).

[8] Otto Lummer und Ernst Pringsheim: „Die Vertheilung der Energie im Spectrum des schwarzen Körpers und des blanken Platins“. Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft im Jahre 1899, erster Jahrgang, pp. 23-41. Herausgegeben von Arthur König, Verlag von Johann Ambrosius Barth, Leipzig 1899.

[9] Robert Millikan: „A Direct Photoelectric Determination of Planck’s ‘h’.“ Physical Review, Vol. 7 (1916), pp. 355-388.

[10] Robert Millikan: „The electron and the light-quant from the experimental point of view“. Nobel-Vorlesung vom 23. Mai 1924 (Nobelpreis 1923).
Online unter ⟨nobelprize.org/physics/laureates/1923/millikan-lecture.pdf⟩.

[11] Abraham Pais: „Raffiniert ist der Herrgott...“ Albert Einstein. Eine wissenschaftliche Biographie (Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1986).

[12] Max Planck: Physikalische Abhandlungen und Vorträge, Bd. I-III (Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1958).

[13] Max Planck: Brief an Robert Williams Wood von 1931. Wiedergegeben in „Frühgeschichte der Quantentheorie“, p. 31, von A. Hermann (Physik Verlag, Mosbach 1969).

[14] Ernst Pringsheim: „Einfache Herleitung des Kirchhoff’schen Gesetzes“. Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft in Jahre 1901, dritter Jahrgang, pp. 81-84. Herausgegeben von Arthur König, Verlag von Johann Ambrosius Barth, Leipzig 1901.

[15] Heinrich Rubens und Ferdinand Kurlbaum: „Über die Emission langwelliger Wärmestrahlen durch den schwarzen Körper bei verschiedenen Temperaturen“. Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften 1900, Gesamtsitzung vom 25. Oktober, pp. 929-941.

[16] Arnold Sommerfeld: „Das Plancksche Wirkungsquantum und seine allgemeine Bedeutung für die Molekülphysik“. Verhandlungen der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte, 83. Versammlung zu Karlsruhe 1911, zweiter Teil, pp. 31-50.